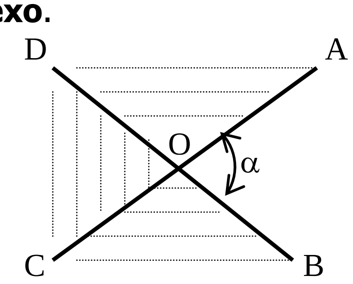
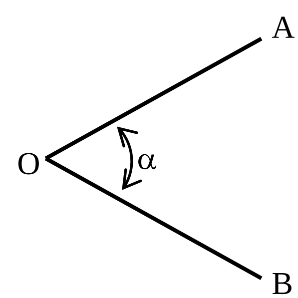
Geometría

La geometría es la parte de la matemática que estudia las propiedades de las figuras y de los cuerpos, sin importar su posición, tamaño y la materia de la que están constituidos; estudia también la medida de las superficies y de los volúmenes.

GENERACIÓN DE ÁNGULOS

Si en un plano se trazan dos rectas AC y BD que se cortan en un punto **O**, el plano queda dividido en cuatro sectores, cada uno de los cuales se llama **ángulo convexo**.



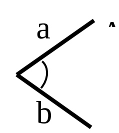


El punto **O** se llama **vértice** y las dos semirrectas que limitan cada ángulo se llaman **lados** del ángulo.

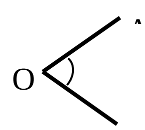
Notación: El ángulo de vértice **O**, que tiene por lados las semirrectas $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ se designa **AÔB** o **BÔA** .

El ángulo puede designarse:

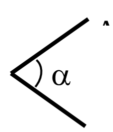
a) por las rectas a que pertenecen sus lados: âb



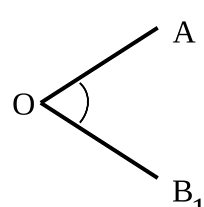
b) por la letra de su vértice: ô



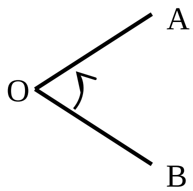
c) por una letra griega: α

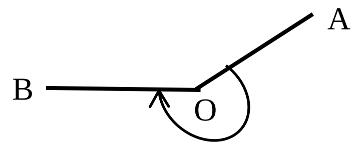


Un ángulo se considera generado mediante un giro (en un plano) de una semirrecta, desde una posición inicial OA hasta una posición terminal OB. Así, el punto **O** es el vértice, **OA** es el lado inicial y **OB** el lado terminal



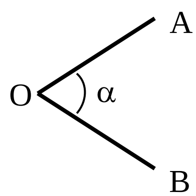
Un ángulo así generado es **positivo** si el giro es anti-horario, y es **negativo** si el giro es en sentido horario.



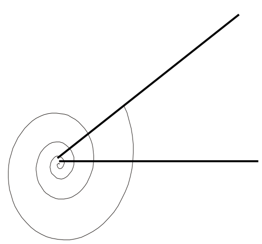


Positivo: anti-horario Negativo: horario

La semirrecta "móvil" puede pasar del lado inicial al terminal directamente, barriendo el ángulo α.



O bien después de haber dado uno o más giros completos

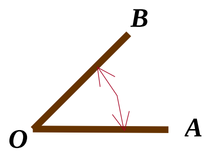


1 giro completo + α
2 giro completos + α
3 giro completos + α
n giro completos + α

Observemos que α; 1 giro + α ; n giros + α tienen sus lados coincidentes, sin embargo **no son iguales**; se les llama **ángulos congruentes de una vuelta**.

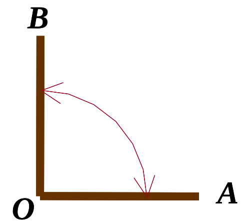
Como las vueltas pueden hacerse en un sentido o en otro, los valores de la medida de un ángulo están comprendidos entre + ∞ y - ∞.

Ángulos Característicos



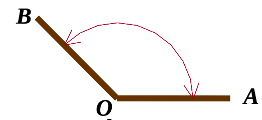
Ángulo Agudo

0º < á < 90º



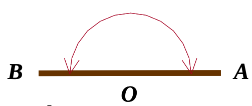
Ángulo Recto

α = 90º



Ángulo Obtuso

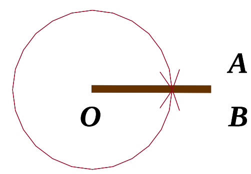
90º < á < 180º



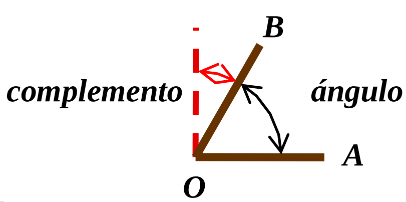
Ángulo Llano

α = 180Ί

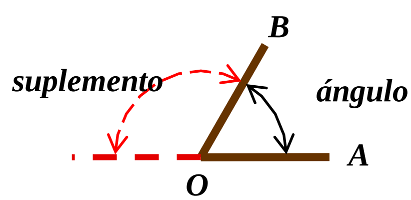
α = 360º



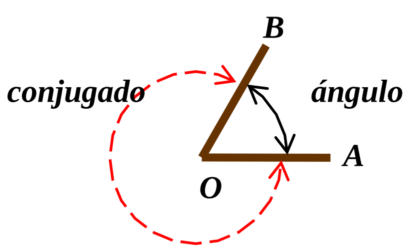
Ángulo Completo
o Perigonal



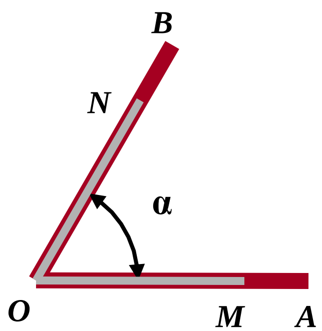
Ángulos Complementarios



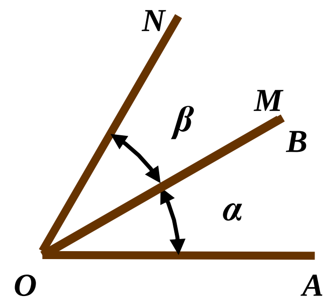
Ángulos Suplementarios



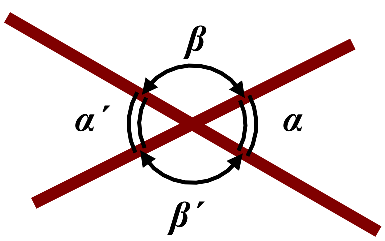
Ángulos Conjugados



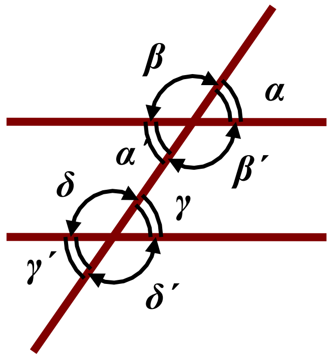
Ángulos Congruentes



Ángulos Adyacentes



Ángulos Opuestos por el Vértice

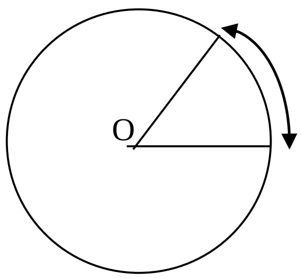


Ángulos formados por 2 rectas paralelas cortadas por una

MEDIDA DE LOS ÁNGULOS

Medir un ángulo es compararlo con otro ángulo que se toma como unidad de medida.

Medir un arco de circunferencia es compararlo con otro arco de circunferencia, que se elige como unidad de medida.



Nota: al girar la semirrecta (radio) con respecto de un punto **O** (centro) describe un *arco de circunferencia.*

La medida del ángulo central es la medida del arco que abarca. A distintas unidades de medida, distinta será la mediad del ángulo.

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR

Los sistemas de medición son:

1) Sexagesimal
2) Centesimal
3) Circular

1) Sexagesimal

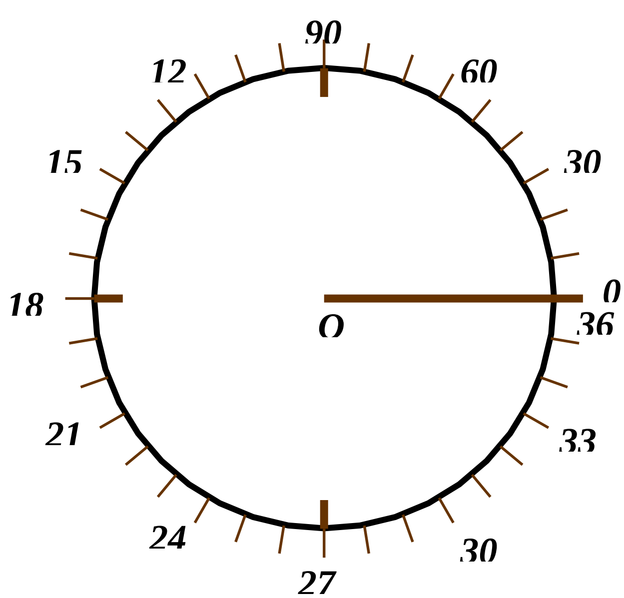
Si consideramos como unidad de medida la medida de un ángulo central subtendido por un arco igual a $\frac{1}{360}$ de la circunferencia (esto es dividir la circunferencia en 360 partes) queda definido el grado sexagesimal (º).
Un minuto (´) es $\frac{1}{60}$ de grado; un segundo (´´) es $\frac{1}{60}$ de un minuto.

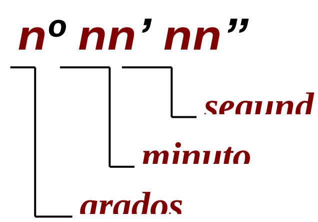
En este sistema la circunferencia tiene 360º.

Un ángulo recto mide $\frac{360^{o}}{4} = 90^{o}$

1º ⟶ 60 ´ 1º ⟶ $\frac{60´}{^{o}}\, x \,\frac{60´´}{´} = 3600´´$

1´ ⟶ 60´´





Giro Total: 360º

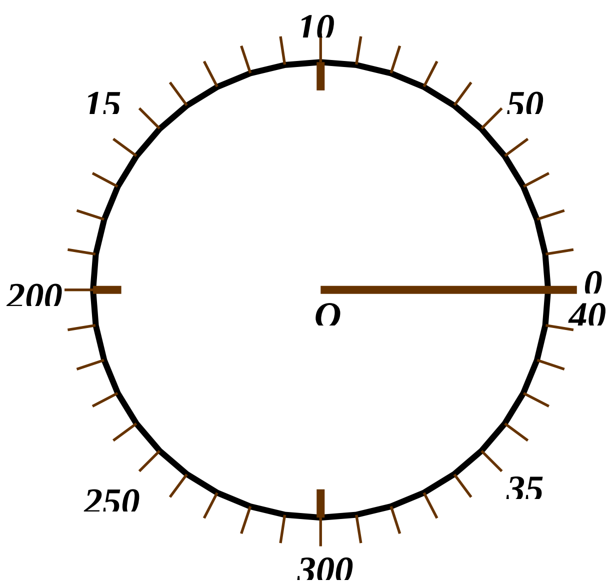
2) Sistema centesimal

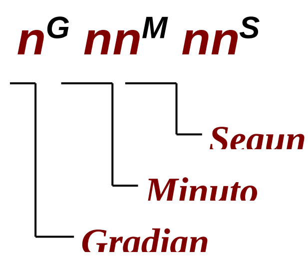
Si consideramos como unidad de medida, la medida del ángulo central subtendido por un arco igual a $\frac{1}{400}$ de la circunferencia (es decir divido la circunferencia en 400 partes) queda definido el grado centesimal (^{g}).

Un minuto (^{M}) es $\frac{1}{100}$ de grado; un segundo (^{S}) es $\frac{1}{100}$ de un minuto.

En este sistema la circunferencia tiene 400^g
Un ángulo recto mide 100^g

$$1^g = 100^M$$
$$1^M = 100^S$$



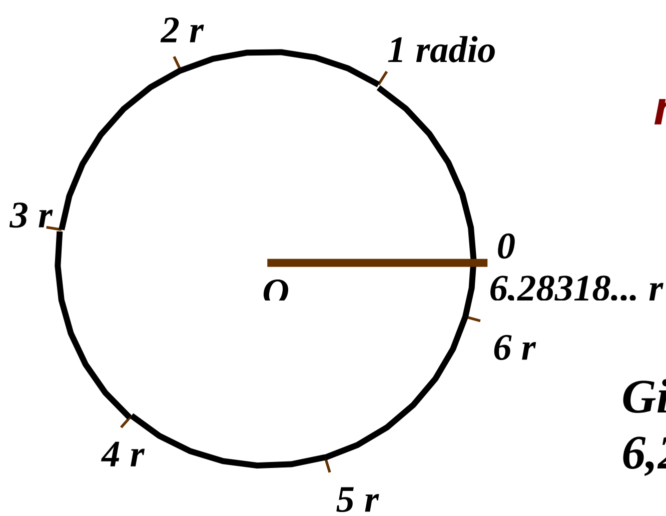


Giro Total: 400^G

2) Sistema circular o radial

Si consideramos como unidad de medida la medida del ángulo central subtendido por un arco *cuya longitud es igual a la del radio* de la circunferencia, queda definido el **radián** (rad) que es la unidad de medida en el sistema circular.

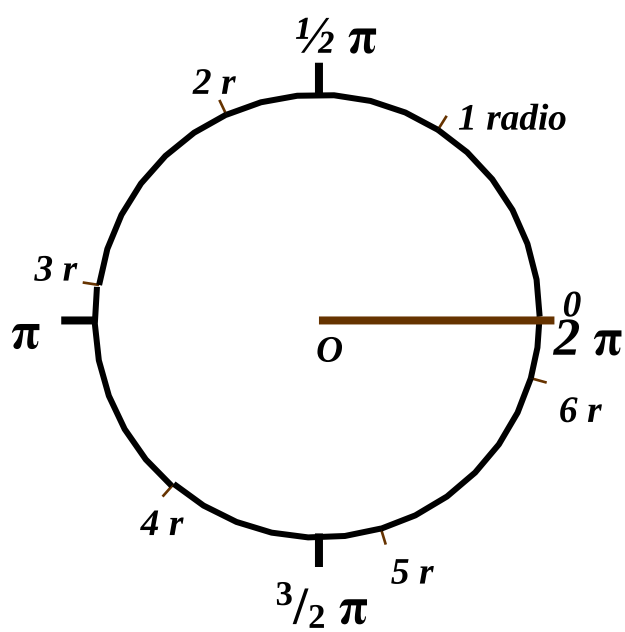
La longitud de la circunferencia es: **2 . π . r** = 2 . π . radio
y subtiende un ángulo de 360º



$n,nnnn^r$

radián

Giro Total:
6,28318... r



$360º = 2.\pi$ radián

$270^{o} = \frac{3}{2}\pi$ radián

$180º = \pi$ radián

$90^{o} = \frac{\pi}{2}$ radián

$1^{o} = \frac{\pi}{180}$ radián $\Rightarrow$ 1 ang. Radián = $\frac{180^{o}}{\pi}$

Equivalencias entre sistemas de medición

Empleando regla de tres:

long. Circunferencia = 2 .π .radián ———————— 360º

1 radián ———————— X = $\frac{1radián \times 360^{o}}{2\pi radián}$

X= 57,2958 ⟶ 57º 17´ 45´´

1 ángulo recto = $\frac{2\pi.radián}{4} = \frac{\pi}{2}$ radián

1 radián = $\frac{360^{o}}{2\pi} = \frac{180^{o}}{\pi} = \frac{180^{o}}{3{,}14159} = 57{,}2958$ ⟶ 57º 17´ 45´´

360º ——— 2.π radián

αº ——— $x = \frac{\alpha^{o}.2.\pi.radián}{360^{o}}$

Relacionando los tres sistemas:

$360º = 2.\pi.$radián $= 400^{G}$

Ejercicios:

1) Expresar en radianes (en función de π) Pasamos de Sexagesimal a Radial

a) 90º

360º —— 2.π radián

90º —— $x = \frac{90^{o}.2.\pi.radián}{360^{o}} = \frac{180^{o}}{360^{o}}\pi.radián = \frac{\pi}{2}\ radián$

b) 45º

360º —— 2.π radián

45º —— $x = \frac{45^{o}.2.\pi.radián}{360^{o}} = \frac{90^{o}}{360^{o}}\pi.radián = \frac{\pi}{4}\ radián$

c) 60º

360º —— 2.π radián

60º —— $x = \frac{60^{o}.2.\pi.radián}{360^{o}} = \frac{120^{o}}{360^{o}}\pi.radián = \frac{\pi}{3}\ radián$

d) 10º

360º —— 2.π radián

10º —— $x = \frac{10^{o}.2.\pi.radián}{360^{o}} = \frac{20^{o}}{360^{o}}\pi.radián = \frac{\pi}{18}\ radián$

e) 1º

360º —— 2.π radián

1º —— $x = \frac{1^{o}.2.\pi.radián}{360^{o}} = \frac{2^{o}}{360^{o}}\pi.radián = \frac{\pi}{180}\ radián$

f) 120º

360º —— 2.π radián

120º —— $x = \frac{120^{o}.2.\pi.radián}{360^{o}} = \frac{240^{o}}{360^{o}}.3{,}1459\ .radián = 2{,}094\ .radián$

g) 330º

360º —— 2.π radián

120º —— $x = \frac{330^{o}.2.\pi.radián}{360^{o}} = \frac{330^{o}}{180^{o}}.3{,}1459\ .radián = 5{,}7596\ .radián$

2) Expresar en radianes (en función de π) Pasamos de Centesimal a Radial

a) 100^g

400^g —— $2.\pi$ radián

100^g —— $x = \dfrac{100^g .2.\pi.radián}{400^g} = \dfrac{200^g}{400^g}\pi.radián = \dfrac{\pi}{2} radián$

b) 45^g

400^g —— $2.\pi$ radián

45^g —— $x = \dfrac{45^g .2.\pi.radián}{400^g} = \dfrac{90^g}{400^g}\pi.radián = 0.225\pi.radián$

c) 200^g

400^g —— $2.\pi$ radián

200^g —— $x = \dfrac{200^g .2.\pi.radián}{400^g} = \dfrac{400^o}{400^o}\pi.radián = \pi.radián$

d) 300^g

400^g —— $2.\pi$ radián

300^g —— $x = \dfrac{300^g .2.\pi.radián}{400^g} = \dfrac{600^g}{400^g}\pi.radián = \dfrac{3}{2}\pi.radián$

3) Expresar en grados sexagesimales (Centesimal a Sexagesimal)

a) 100^g

400^g —— 360^o

100^g —— $x = \dfrac{100^g \times 360^o}{400^g} = 90^o$

b) 45^g

400^g —— 360^o

45^g —— $x = \dfrac{45^g \times 360^o}{400^g} = 40.5^o = 40^o 30'$

c) 200^g

400^g —— 360^o

200^g —— $x = \dfrac{200^g \times 360^o}{400^g} = 180^o$

d) 300^g

400^g —— 360^o

300^g —— $x = \dfrac{300^g \times 360^o}{400^g} = 270^o$

4) Expresar en grados centesimales (Sexagesimal a Centesimal)

a) 90°

360º —— 400^g

90º —— $x = \dfrac{90^0 \times 400^g}{360^0} = 100^g$

b) 45°

360º —— 400^g

45º —— $x = \dfrac{45^0 \times 400^g}{360^0} = 50^g$

5) Expresar en grados centesimales (Radial a Centesimal)

a) $\dfrac{\pi}{2} radián$

2π radián —— 400^g

$\dfrac{\pi}{2} radián$ —— $x = \dfrac{\pi.radián \times 400^g}{2 \times 2\pi.radián} = 100^g$

b) $\dfrac{3}{2}\pi.radián$

2π radián —— 400^g

$\dfrac{3}{2}\pi.radián$ —— $x = \dfrac{3.\pi.radián \times 400^g}{2 \times 2\pi.radián} = 300^g$

PREGUNTAS DE AUTO EVALUACIÓN

1) ¿Qué signo corresponde a un ángulo con sentido de giro anti-horario y a uno con sentido de giro horario?

2) Dar dos ejemplos de ángulos complementarios

3) Dar dos ejemplos de ángulos suplementarios

4) Dar dos ejemplos de ángulos conjugados

5) ¿En cuantas partes se divide la circunferencia en el sistema sexagesimal?

6) ¿Cuántos segundos hay en un grado sexagesimal?

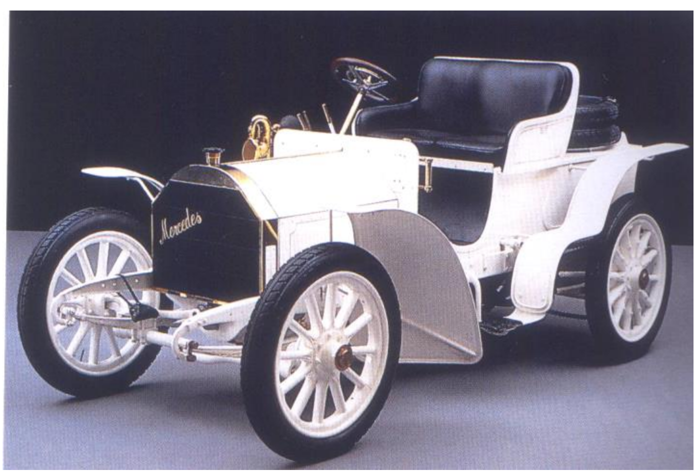
7) ¿En cuantas partes se divide la circunferencia en el sistema centesimal?

8) ¿Cuántos segundos hay en un grado centesimal?

9) ¿Qué medida tiene el arco para 1 radián si el radio es igual a 4 cm.?

10) ¿Cómo es la relación entre los tres sistemas de medición de ángulos?

11) Calcular el ángulo existente entre los rayos de las llantas del Mercedes Benz de la figura y expresarlo en los tres sistemas de medición.



Año
1904