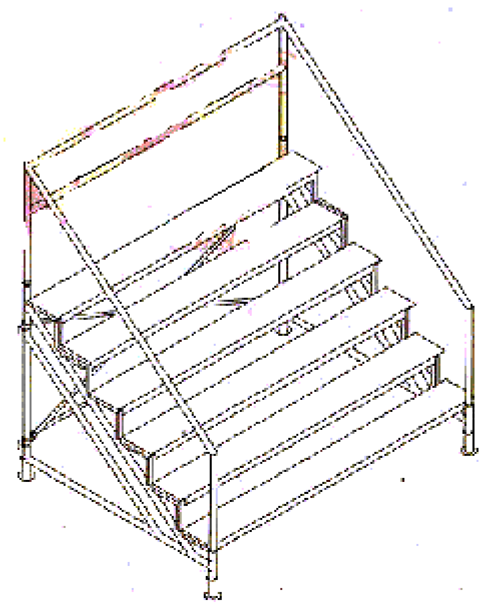
TRIGONOMETRÍA

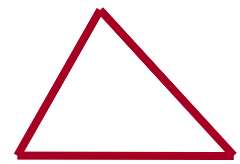
Es la rama de la matemática que tiene por objeto el estudio de las relaciones numéricas que existen entre los elementos rectilíneos y angulares de un triángulo o de una figura geométrica en general y su aplicación a la solución numérica de los problemas que puedan presentarse.



Para calcular la longitud de las barras de este cuerpo de tribuna, la longitud de las barras de la cabriada de madera o la altura que alcanzará la escalera según el ángulo de apertura necesitamos conocer los ángulos y los lados de los triángulos que se forman.

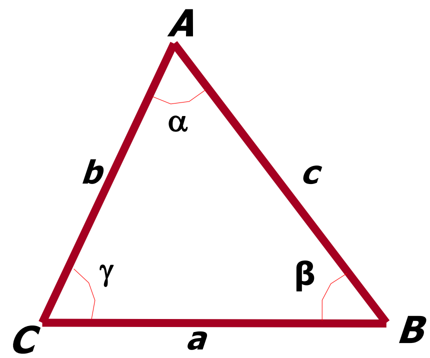
TRIÁNGULO:

Definimos un triángulo como una figura geométrica formada por una poligonal cerrada, delimitada por tres lados.



Elementos de un triángulo:

- Lados: a, b , c
- Ángulos: α, β, γ
- Vértices: A, B, C

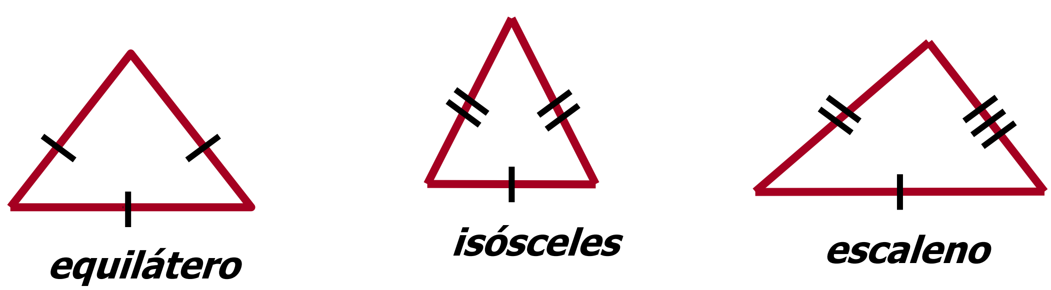


Propiedad: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180º",

Es decir que $\alpha + \beta + \gamma = 180º$

Clasificación de los triángulos:

Clasificación por sus lados:

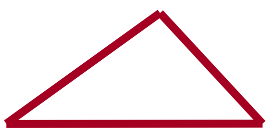


Equilátero: tiene todos sus lados iguales
Isósceles: tiene dos lados iguales y uno desigual
Escaleno: tiene todos sus lados desiguales

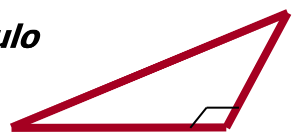
Clasificación por sus ángulos:

- ***oblicuángulos***
  - ***acutángulos***
  - ***obtusángulos***
- ***rectángulos***

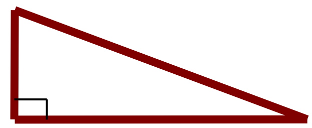
oblicuángulo



acutángulo



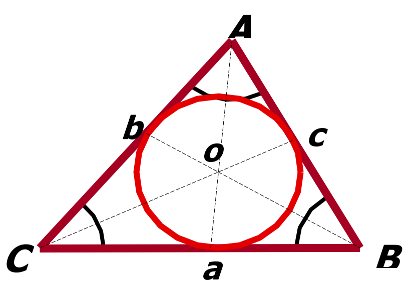
obtusángulo



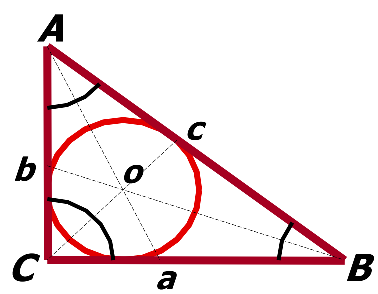
rectángulo

Líneas y puntos notables de un triángulo:

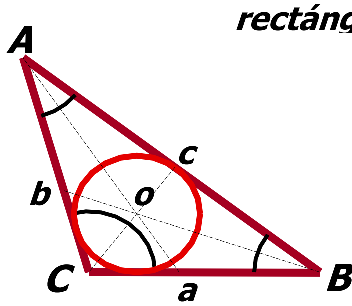
Bisectrices de un triángulo:



acutángulo



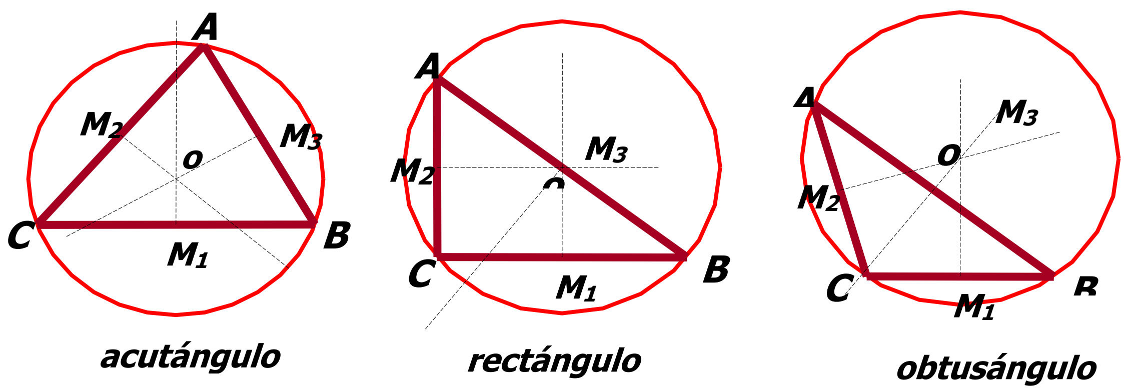
rectángulo



obtusángulo

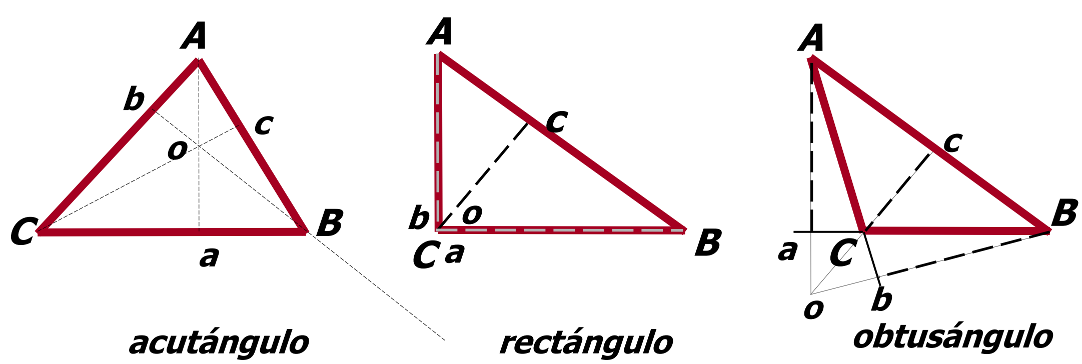
Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto interior que equidista de sus lados. El punto "O" se denomina **incentro**.

Mediatrices de un triángulo:



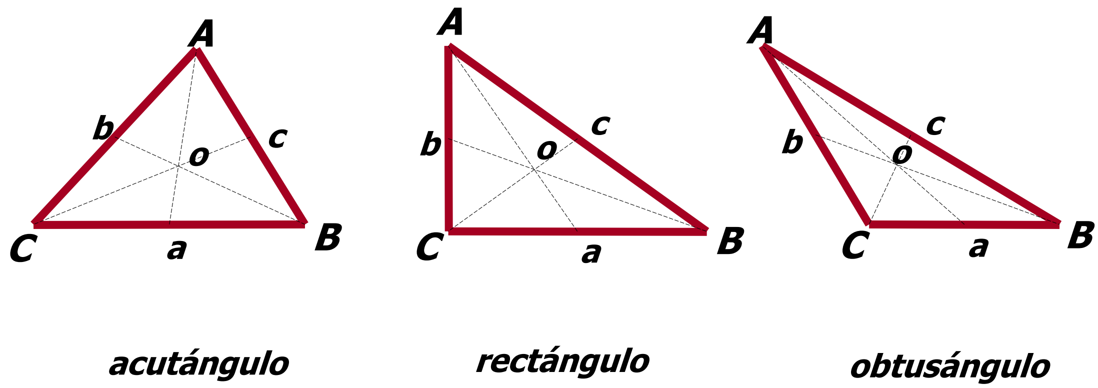
Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto que equidista de sus vértices. El punto "O" se denomina **circuncentro**.

Alturas de un triángulo:



Las rectas que contienen a las alturas de un triángulo se cortan en un punto. El punto "O" se denomina **centro ortogonal** u **ortocentro**.

Medianas de un triángulo:



Las medianas de un triángulo se cortan en un punto interior cuya distancia a cada vértice es igual a 2/3 de la mediana correspondiente.
El punto "O" se denomina **baricentro** (centro de gravedad).

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

TEOREMA DE PITÁGORAS: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

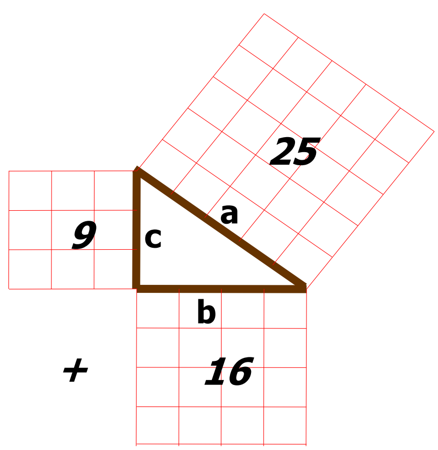
$$a^2 = b^2 + c^2$$

de donde:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

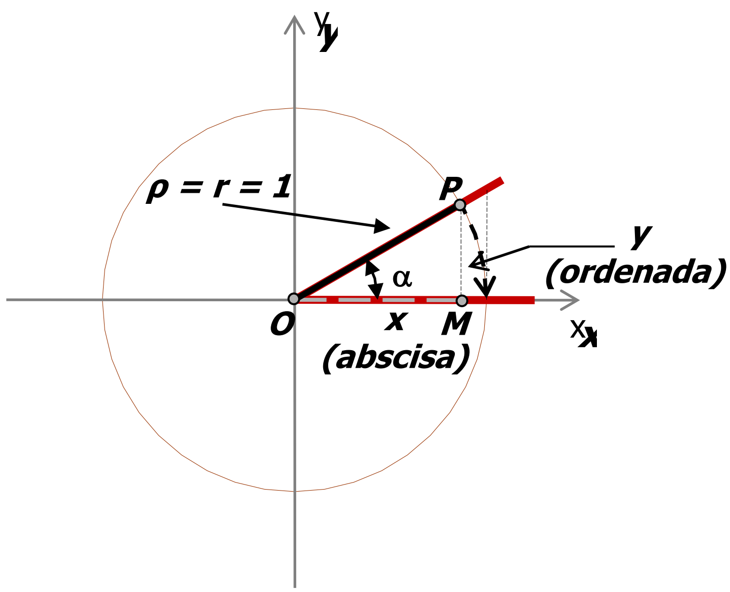
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

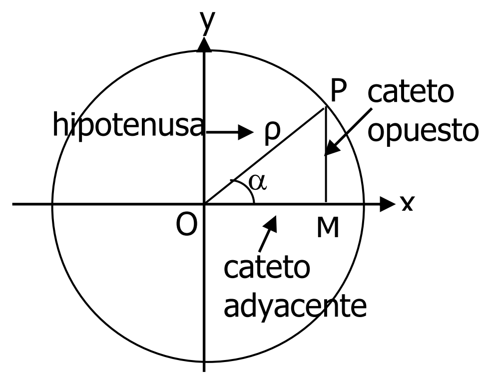


FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Si consideramos un ángulo α orientado (puede ser positivo o negativo) respecto de un sistema de ejes de coordenadas rectangulares, de manera que el vértice coincida con el origen y su lado inicial con el semieje positivo de las **x**, se dice que es un ángulo del primer cuadrante si su lado terminal cae en dicho cuadrante. Definiciones semejantes se aplican a otros cuadrantes.

Utilizaremos tres funciones trigonométricas de α, definidas en base a la abscisa, la ordenada y la distancia $\boldsymbol{\rho}$ (radio vector) y en base a los lados de un triángulo rectángulo como sigue:





* seno α = $sen\alpha = \dfrac{ordenada}{radio.vector} = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{cateto.opuesto}{hipotenusa}$

* coseno α = $\cos\alpha = \dfrac{abscisa}{radio.vector} = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{cateto.adyacente}{hipotenusa}$

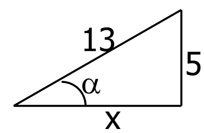
* tangente α = tg α = $\dfrac{ordenada}{abscisa} = \dfrac{y}{x} = \dfrac{cateto.opuesto}{cateto.adyacente}$

Además observemos que: **tg** α **=** $\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

Estas tres funciones nos servirán para resolver los distintos triángulos rectángulos que se puedan presentar.

Ejercicios:
Encontrar el valor de las tres funciones trigonométricas del ángulo α, de un triángulo rectángulo, sabiendo que:

a) cateto opuesto = 5
hipotenusa = 13

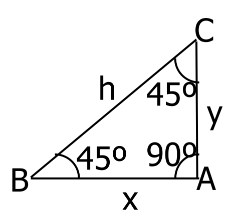


$h^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = h^2 - y^2 \Rightarrow x = \sqrt{h^2 - y^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

sen $\alpha = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{5}{13} = 0{,}3846$ cos $\alpha = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{12}{13} = 0{,}92307$

tg $\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{12} = 0{,}41666$

b) Encontrar los valores de las tres funciones trigonométricas de 45º



Cuando tengo α = 45º, como Â = 90º debe ser el otro ángulo: Ĉ = 45º, por lo tanto deben ser **x = y**.

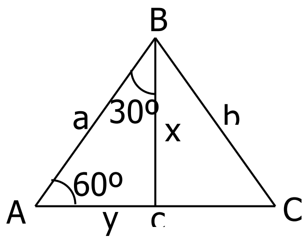
Supongamos x = y = 1

Será h = $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

sen $\alpha = \dfrac{y}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70710$ cos $\alpha = \dfrac{x}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70710$

tg $\alpha = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{1} = 1$

c) Encontrar los valores de las tres funciones trigonométricas de 30º



Supongamos un triángulo equilátero con lados **a = 1** , **b = 1**, **c = 1**

Será: $y = \frac{c}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$a^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - y^2 \Rightarrow$

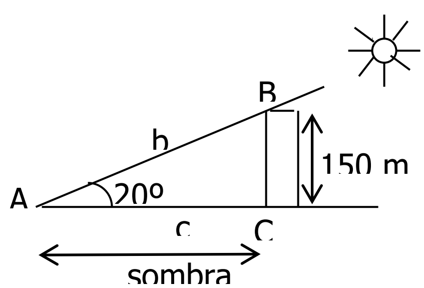
$x = \sqrt{a^2 - y^2} = \sqrt{1^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{1 - 0{,}25} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866$

$$\text{sen } 30º = \frac{cat.op}{hipotenusa} = \frac{y}{a} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

$$\cos 30º = \frac{cat.ady.}{hipotenusa} = \frac{x}{a} = \frac{0{,}866}{1} = 0{,}866$$

$$\text{tg } 30º = \frac{cat.op}{cat.ady} = \frac{y}{x} = \frac{0{,}5}{0{,}866} = 0{,}577$$

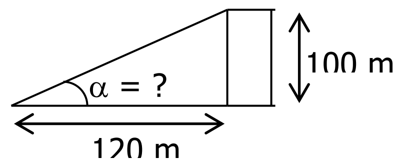
d) ¿Cuál es la longitud de la sombra proyectada por un edificio de 150 mts. de altura cuando el Sol se eleva a 20º sobre el horizonte?



$$\text{sen } 20º = \frac{\overline{BC}}{b} \Rightarrow b = \frac{\overline{BC}}{sen 20º} = \frac{150\,m}{0{,}34202} = 438{,}57\,m$$

$$\cos 20º = \frac{\overline{AC}}{b} \Rightarrow \overline{AC} = b.\cos 20º = 438{,}57m.0{,}93969 = 412{,}12 \text{ m}$$

e)Un edificio de 100 m de altura proyecta una sombra de 120 m de longitud. Encontrar el ángulo de elevación del sol.



tg α = $\frac{100}{120} = 0{,}83333$

arc tg 0,8333 = 39,80557 º

1º ——— 60 ´

0,80557º ——— x = $\frac{60´.0{,}80557}{1º} = 48{,}3342´$

1 ´ ——— 60 ´´

0,3342 ´ ——— x = $\frac{60´´.0{,}3342´}{1´} = 20$ ´´

Respuesta: el ángulo α = 39 º 48 ´ 20´´

Tabla de las funciones trigonométricas de 0º, 30º, 45º, 60º y 90º

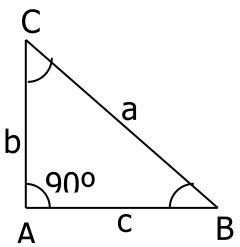
	0 º	30º	45 º	60º	90º
Seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad 1 = \cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS



Los ángulos agudos B y Ĉ de un triángulo rectángulo ABC son complementarios, es decir:

B + C = 90º

Se tiene que:

sen B = $\frac{b}{a} = \cos C$ cos B = $\frac{c}{a}$ = sen C

tg B = $\frac{senB}{\cos B}$

Así, cualquier función de un ángulo agudo, es igual a la correspondiente cofunción de un ángulo complementario. Esta propiedad permite confeccionar la tablas de las funciones trigonométricas a doble entrada.

Ejercicios:

Calcular las siguientes funciones y determinar a qué otra función corresponden:

a) sen 17 º 16 ´

sen 17 º 16 ´ = 0,296819 $\longrightarrow$ complementario: β = 72 º 44 ´

cos β = 0,296819

b) cos 68 º 12´

cos 68º 12´ = 0,37136 $\longrightarrow$ complementario: β = 21º 48´

sen β = 0,37136

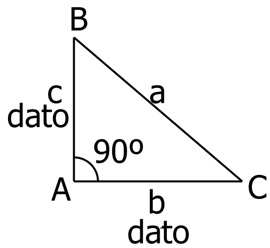
ctg 400º = $\frac{1}{tg400^o} = \frac{1}{0,839099} = 1,19175$

tg β = tg 50º = 1,19175

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Cualquier triángulo rectángulo puede resolverse, es decir, conocer todos sus elementos en base a dos de ellos, de los cuales uno por lo menos será un lado.
Las relaciones que unen los elementos conocidos con las incógnitas serán:

- las funciones trigonométricas de ángulos agudos
- el teorema de Pitágoras

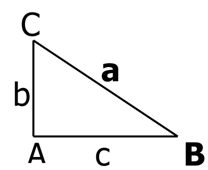


Así por ejemplo, si conocemos del triángulo ABC, los lados **b** y **c** , las incógnitas serán **a**, **B** y **C**, y cuando se requiera, la superficie del triángulo.

Entonces será: $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

tg C = $\frac{c}{b} \Rightarrow$ C = arc tg $\frac{c}{b}$ tg B = $\frac{b}{c} \Rightarrow$ B = arc. tg $\frac{b}{c}$ Superficie = $\frac{b.c}{2}$

Ejercicios:
Resolver los siguientes triángulos rectángulos:



a) Datos: a = 765,40 m B = 68 º 46´

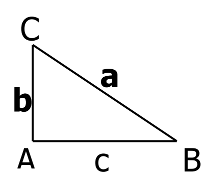
C es complementario de B $\Rightarrow$ C = 90º - 68 º 46´ = 21º 14´

sen B = $\frac{b}{a} \Rightarrow$ b = a . sen B = 768,40 m . 0,93211 = 716,23 m

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(768{,}40m)^2 - (716{,}23m)^2} = 278{,}30m$

Superficie = $\frac{b.c}{2} = \frac{716{,}23m \times 278{,}30m}{2}$ = 99.663,40 m^2

b) Datos: a = 96,59 m b = 76,30 m



sen B = $\frac{b}{a} = \frac{76{,}30m}{96{,}59m} = 0{,}78993$

B = arc.sen 0,78993 = 52,179610º

1º ——— 60 ´

0,179610º ——— $x = \frac{60´ \times 0{,}179610}{1º} = 10{,}7766´$

1 ´ ——— 60 ´´

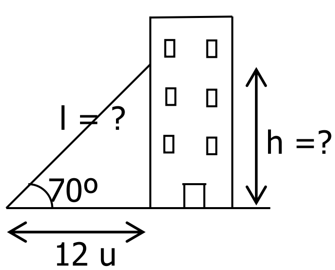
0,7766 ´ ——— $x = \frac{60´´ \times 0{,}7766´}{1´} = 46$ ´´

Respuesta: el ángulo B = 52 º 10 ´ 46´´

C = 90º - 52 º 10 ´ 46´´ = 37º 49´ 14´´

tg B = $\frac{b}{c}$ $\Rightarrow$ c = $\frac{b}{tgB} = \frac{76{,}30m}{1{,}28823}$ = 59,23 m

c) Una escalera de mano está apoyada contra la pared de un edificio, de modo que del pie de la escalera al edificio hay 12 unidades. ¿A qué altura del suelo se encuentra el extremo superior de la escalera y cuál es la longitud de la misma, si forma un ángulo de 70º con el suelo?

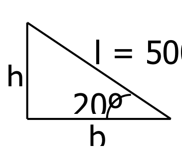


tg 70º = $\frac{h}{12u}$ $\Rightarrow$ h = 12 u . tg 70º

h = 12 u . 2,747477 = 32,97 u

l = $\sqrt{(12u)^2 + (32{,}97u)^2}$ = 35,08 u

d) Un hombre recorre 500 m a lo largo de un camino que tiene una inclinación de 20º respecto de la horizontal. ¿Qué altura alcanza respecto al punto de partida? ¿Cuál es la pendiente del camino?

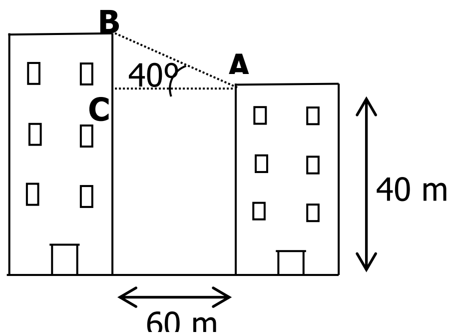


sen 20º = $\frac{h}{l}$ $\Rightarrow$ h = l . sen 20º

h = 500 m . 0,34202 = 171,01 m

pend = tg 20º = $\frac{h}{b} = 0{,}3639$

e) La distancia entre dos edificios de tejado plano es de 60 mts. Desde la azotea del edificio más bajo, cuya altura es de 40 mts., se observa la azotea del otro con un ángulo de elevación de 40º. ¿Cuál es la altura del edificio más alto?



h = 40 m + BC

tg40º = $\frac{\overline{BC}}{60m}$

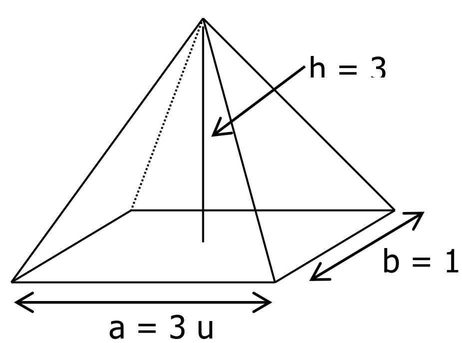
$\Rightarrow$ BC = 60 m . tg 40º =

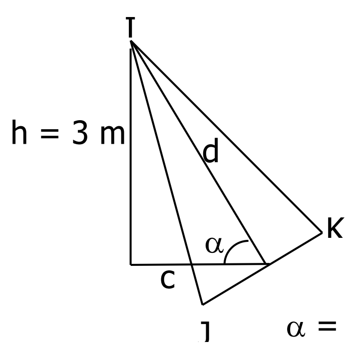
BC = 60 m . 0,839099 =

BC = 50,34 m

h = 40 m + BC = 40 m + 50,34 m = 90,34 m

f) Un techo tiene la forma de una pirámide rectangular, siendo la base 3 veces más larga que ancha. Sabiendo que la altura es de 3 mts. y que el ángulo diedro que tiene por arista el lado menor del rectángulo vale 26º 33´, calcular la superficie del techo.





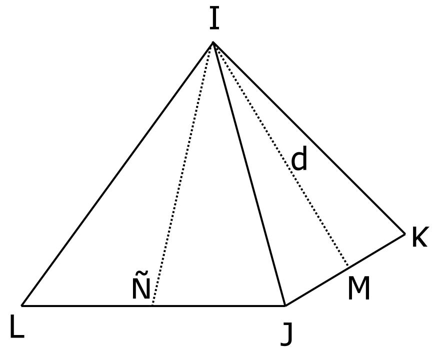
α = 26º 33´

tg 26º 33´ = $\frac{3m}{c}$ $\Rightarrow$ c = $\frac{3m}{tg 26º33´} = \frac{3m}{0{,}49967} =$ 6 m

a = 2 . c = 2 . 6 m = 12 m

b = $\frac{a}{33} = \frac{12m}{3}$ = 4 m d = $\sqrt{(3m)^2 + (6m)^2} = 6{,}708$

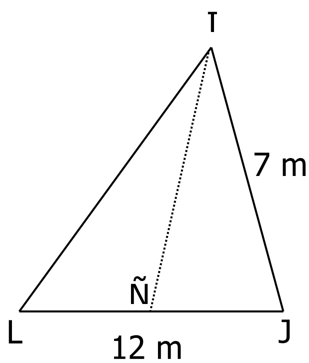
Superficie de la cara IJK (triángulo) : $S_{IJK} = \dfrac{4m \times 6{,}708\,m}{2} = 13{,}41\ m^2$



$$\overline{IJ} = \sqrt{\overline{MJ}^2 + d^2}$$

$$\overline{MJ} = \frac{4m}{2} = 2\ m$$

$$\overline{IJ} = \sqrt{(2m)^2 + (6{,}708m)^2} = 7\ m$$



$$\overline{I\tilde{N}} = \sqrt{(7m)^2 - \overline{\tilde{N}J}^2}$$

$$\overline{\tilde{N}J} = \frac{\overline{LJ}}{2} = \frac{12m}{2} = 6\ m$$

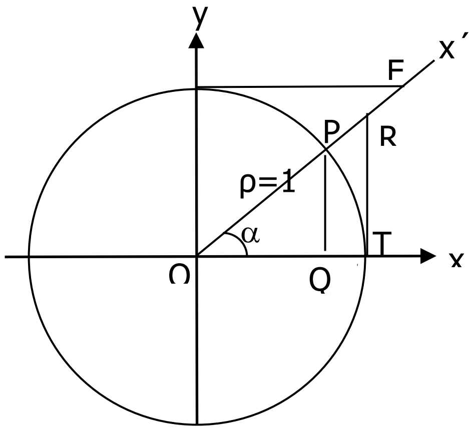
$$\overline{I\tilde{N}} = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{49 - 36} = 3{,}60\ m$$

$$SUP_{ILJ} = \frac{\overline{LJ} \times \overline{I\tilde{N}}}{2} = \frac{12m.3{,}60m}{2} = 21{,}60\ m^2$$

$SUP_{TECHO} = 2\ .\ SUP_{ILJ} + 2\ .\ SUP_{IJK} = 2 \times 21{,}60m^2 + 2 \times 13{,}41\ m^2 = 70{,}02\ m^2$

FUNCIONES GONIOMÉTRICAS

Las funciones vistas eran para ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Ahora se generaliza para cualquier ángulo.



Si a la línea generadora del ángulo α, que inicialmente está en OX la hacemos girar en sentido (+) barriendo un ángulo α, y por un punto cualquiera de OX, por ejemplo T, trazamos un círculo con centro en O, podremos formar dos triángulos: uno será el ORT. El punto R se encuentra trazando la perpendicular a OX que pasa por T.

El otro triángulo, se obtiene mediante el punto P (intersección del círculo con X´) y la proyección de OP sobre OX, que es OQ.

Los triángulos OPQ y ORT son proporcionales, por lo tanto también lo serán sus lados.

Asignemos al radio el valor de 1 unidad.

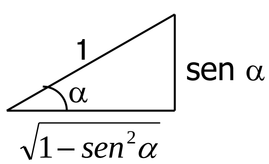
Será entonces:

$$sen\alpha = \frac{\overline{PQ}}{r} \Rightarrow PQ = \text{sen } \alpha \cdot r = \text{sen } \alpha \cdot 1 \qquad tg\ \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \overline{TR}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OQ}}{r} \Rightarrow OQ = \cos\alpha \cdot r = \cos\alpha \cdot 1$$

Conociendo una de las funciones trigonométricas, podemos deducir las demás.

Por ejemplo, dado el **sen α**



$$1^2 = sen^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha$$

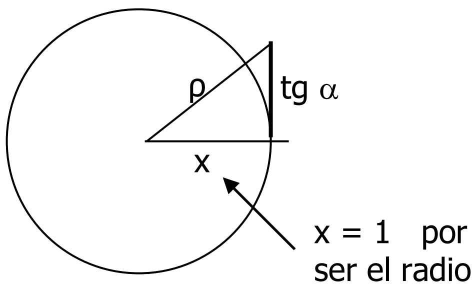
$$\cos^2\ \alpha = \sqrt{1 - sen^2\alpha}$$

Hipotenus

cateto opuesto

$$tg\ \alpha = \frac{cat.opuesto}{cateto.adyacente} = \frac{sen\alpha}{\sqrt{1 - sen^2\alpha}}$$

Otro ejemplo, dado **tg** α

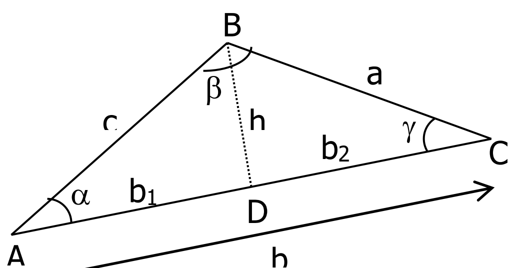


$$\rho = \sqrt{x^2 + tg^2\alpha} = \sqrt{1 + tg^2\alpha}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{\rho} = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS



En el triángulo ABC, no necesariamente rectángulo, trazamos la perpendicular a uno de sus lados que pase por el vértice opuesto, obteniendo su altura, y de paso, dividimos al triángulo en dos triángulos rectángulos ADB y BDC.

Entonces se cumple que: $a^2 = h^2 + b_2^2$ donde $b_2 = b - b_1$

$$b_2^2 = (b - b_1)^2 = b^2 - 2b.b_1 + b_1^2$$

reemplazando:

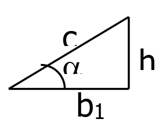
$$a^2 = h^2 + b^2 - 2b.b_1 + b_1^2 \quad \text{(todavía no conocemos } b_1\text{)}$$

pero: $c^2 = h^2 + b_1^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = c^2 - b_1^2$

reemplazando queda: $a^2 = c^2 - \underline{b_1^2} + b^2 - 2b.b_1 + \underline{b_1^2}$

cancelando queda: $a^2 = c^2 + b^2 - 2b.b_1$

pero $b_1 = c \cdot \cos \alpha$



entonces:

$\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2b.c.\cos \alpha}$ que es válida para cualquier triángulo.

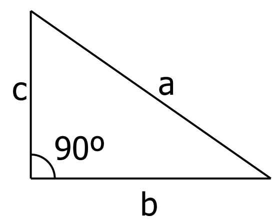
TEOREMA DEL COSENO

$$\boxed{a^2 = c^2 + b^2 - 2b.c.\cos\alpha}$$

"En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el duplo del producto de ellos por el coseno del ángulo comprendido"

Nota: es la generalización del Teorema de Pitágoras al triángulo no rectángulo.

En el caso de ser un triángulo rectángulo, el coseno de 90º es cero.



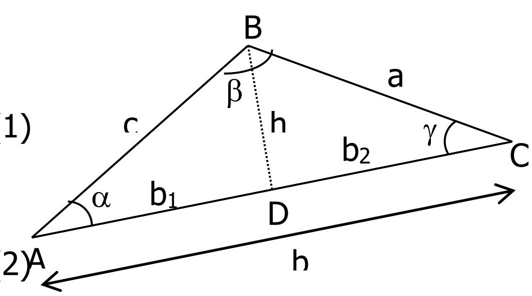
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2b.c.\cos 90º$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2b.c.0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = c^2 + b^2$$

TEOREMA DEL SENO

"En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos"

(1)



(2)

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow h = c\ .\ \text{sen}\ \alpha$$

$$\text{sen}\ \gamma = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow h = a\ .\ \text{sen}\ \gamma$$

igualando (1) con (2):

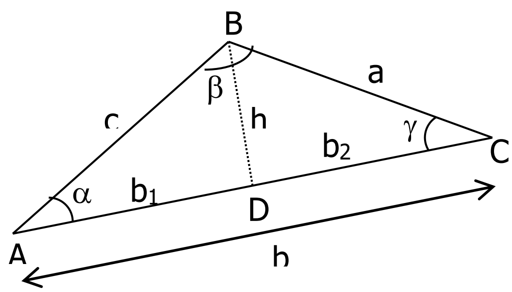
$$h = c\ .\ \text{sen}\ \alpha = a\ .\ \text{sen}\ \gamma$$

$$\frac{c}{sen\gamma} = \frac{a}{sen\alpha}$$

generalizando: $$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

"El área de un triángulo cualquiera, es igual a la mitad del producto de dos de sus lados, multiplicado por el seno del ángulo comprendido"



S = $\frac{a \times b}{2} \times sen\gamma$

Ärea = $\frac{base \times altura}{2} = \frac{b \times h}{2}$

Pero sen γ = $\frac{h}{a}$ $\Rightarrow$ h = a . senγ

Reemplazando: Área = $\frac{b \times a \times sen\gamma}{2}$

FORMULA DE HERÓN

S = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ siendo **a**, **b** y **c** los lados del triángulo

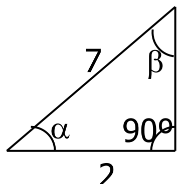
p es el semi – perímetro

p = $\frac{a+b+c}{2}$

Teorema: "El área de un triángulo cualquiera es igual a la raíz cuadrada del producto del semi-perímetro, por cada uno de los números que se obtiene al restar a éste cada uno de los lados del triángulo"

EJERCICIOS:

1) Calcular los ángulos interiores del triángulo.



$\cos \alpha = \frac{2}{7} = 0{,}28571 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \text{arc.cos } 0{,}28571$

$\alpha = 73{,}3984º$

1º ——— 60 ´

0,3984º ——— $x = \frac{60´ \times 0{,}3984}{1º} = 23{,}9070´$

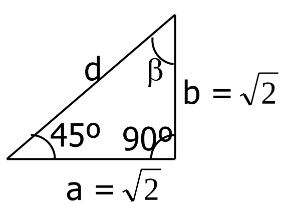
1 ´ ——— 60 ´´

0,9070 ´ ——— $x = \frac{60´´ \times 0{,}9070´}{1´} = 54\ ´´$

$\alpha = 73º\ 23´\ 54´´$

$\alpha + \beta = 90º \quad \Rightarrow \quad \beta = 90º - \alpha = 90º - 73º\ 23´\ 54´´ = 16º\ 36´\ 6´´$

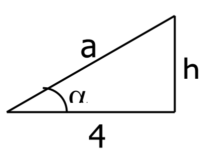
2) Calcular el área de la figura



$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

$Sup = \frac{a \times b}{2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

3) En el triángulo de la figura, calcular **h** y **a** sabiendo que $\cos \alpha = \frac{3}{4}$



$\cos \alpha = \frac{4}{a} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4 \times 4}{3} = \frac{16}{3}$

$a^2 = h^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{a^2 - 4^2} = \sqrt{(\frac{16}{3})^2 - 16} =$

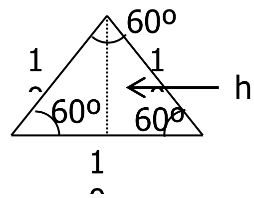
$h = \sqrt{\frac{256}{9} - 16} = \sqrt{\frac{256 - 144}{9}} = \sqrt{\frac{112}{9}} = 3{,}53$

Otro camino:

α = arc.cos $\frac{3}{4}$ = 41,409622º $\longrightarrow$ tg 41,409622º = 0,881917

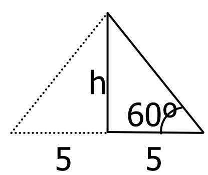
tg α = $\frac{h}{4} = 0{,}881917$ $\Rightarrow$ h = 4 x 0,881917 = 3,53

4) Calcular el área de la figura



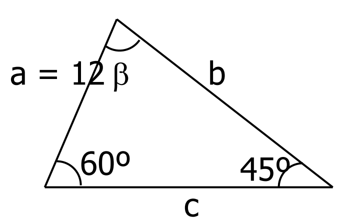
Área = $\frac{base \times h}{2} = \frac{10 \times h}{2}$

tg 60º = $\frac{h}{5}$ $\Rightarrow$ h = 5 x tg 60º = 5 x 1,732051 = 8,66



Área = $\frac{10 \times 8{,}66}{2} = 43{,}3$

5) Calcular el perímetro de la figura



Según el teorema del seno es:

$$\frac{a}{sen 45^{o}} = \frac{b}{sen 60^{o}}$$

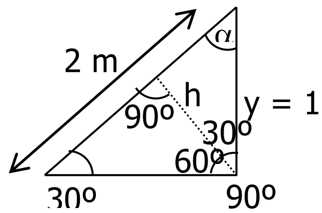
$$\frac{12}{0{,}7071} = \frac{b}{0{,}866} \Rightarrow b = \frac{12 \times 0{,}866}{0{,}7071} = 14{,}70$$

β = 180º - 60º - 45º = 75º

$$\frac{a}{sen 45^{o}} = \frac{c}{sen 75^{o}} \Rightarrow c = \frac{a \times sen 75^{o}}{sen 45^{o}} = \frac{12 \times 0{,}9659}{0{,}7071} = 16{,}39$$

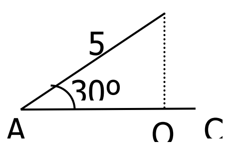
perímetro = a + b + c = 12 + 16,39 + 14,70 = 43,09

6) Calcular **h**



cos 30º = $\frac{h}{y} = \frac{h}{1}$ $\Rightarrow$ h = 1 x cos 30º = 0,866

7) Calcular la longitud del segmento OC

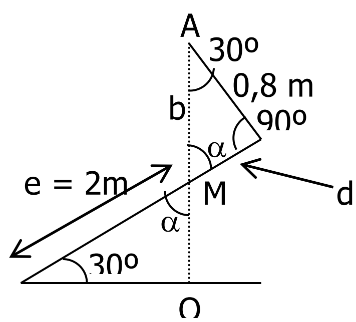


cos 30º = $\frac{\overline{OA}}{5}$ $\Rightarrow$ OA = 5 x cos 30º = 4,33

AC = radio = 5

OC = 5 – OA = 5 – 4,33 = 0,67

8) Calcular la longitud del segmento OA



cos 30º = $\frac{0,8}{\overline{AM}}$ $\Rightarrow$

$$\overline{AM} = \frac{0,8}{\cos 30^\circ} = 0,92m$$

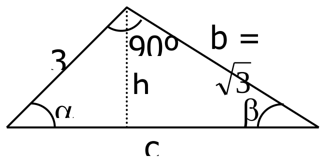
d = $\sqrt{\overline{AM}^2 - 0,8^2} = \sqrt{0,92^2 - 0,8^2} = 0,45$ m

e = 2 m – 0,45 m = 1,55 m

sen 30º = $\frac{\overline{OM}}{e}$ $\Rightarrow$ $\overline{OM} = e \times sen30^\circ = 1,55 \times sen30^\circ = 0,775$ m

OA = OM + AM = 0,775 + 0,92 = 1,69 mts.

9) En el triángulo de la figura calcular **h**, sabiendo que el área es $\frac{3}{2}\sqrt{3}$



tg α = $\frac{b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}57735$

⇒ α = arc.tg 0,57735 = 30º

β = 180º - 30º - 90º = 60º

sen 30º = $\frac{h}{3}$ ⇒ h = 3 x sen 30º = 1,5

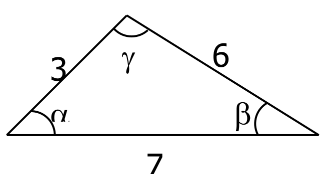
Otro camino:

$$\frac{c}{sen 90^o} = \frac{3}{sen 60^o} \Rightarrow c = \frac{3 \times sen 90^o}{sen 60^o} = 3{,}46$$

$$\text{Área} = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{h \times c}{2}$$

$$h = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3{,}46} = 1{,}5$$

10)Calcular el área y los ángulos interiores del triángulo de la figura.



Semi perímetro = p = $\frac{3+6+7}{2} = \frac{16}{2} = 8$

Por fórmula de Herón:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8(8-3)(8-7)(8-6)} =$$

$$\sqrt{8 \times 5 \times 1 \times 2} = \sqrt{80} = 8{,}95$$

Por el teorema del coseno:

* $6^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \times 3 \times 7 \times \cos\alpha$

36 = 9 + 49 – 42 cos α ⇒ cos α = $\frac{36-9-49}{-42} = 0{,}523809$

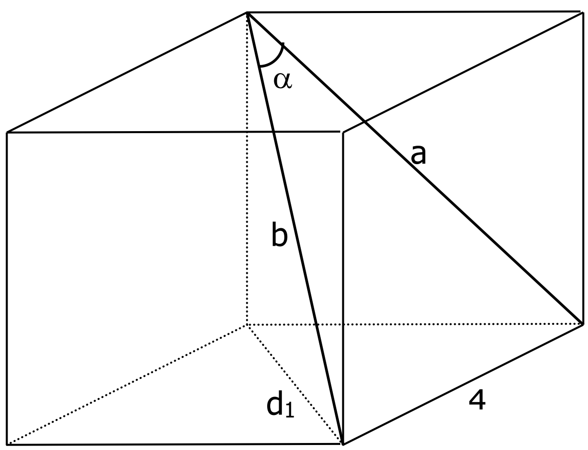
α = arc.cos 0,526809 = 58º 24´ 42´´

* $3^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \times 6 \times 7 \times \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{9 - 36 - 49}{-84} = 0{,}90476$

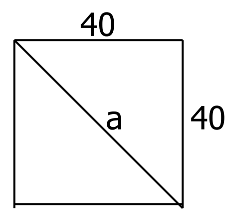
β = arc.cos 0,90476 = 25º 12´ 31´´

* γ = 180º - α - β = 180º - 58º 24´ 42´´ - 25º 12´ 31´´ = 96º 22´ 47´´

11)Calcular el ángulo α de la figura, sabiendo que la arista del cubo mide 40 mi



1) **a** es la diagonal de un cuadrado de 40 mm de arista.



a = $\sqrt{40^2 + 40^2} = 56{,}57\,mm$

2) **b** es la hipotenusa de un triángulo de 40 mm de altura (arista) y **d_1 = a = 56,57 mm**

b = $\sqrt{40^2 + 56{,}57^2} = 69{,}28$ mm

Por teorema del coseno:

$40^2 = a^2 + b^2 - 2.a \,.\, b \,.\, \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{40^2 - a^2 - b^2}{-2ab} = \frac{40^2 - 56{,}57^2 - 69{,}28^2}{-2 \times 56{,}57 \times 69{,}28} =$

$\cos\alpha = \frac{-6398{,}75}{-7838{,}34} = 0{,}816339$

α = arc cos 0,816339 = 35º 16´ 47´´

PREGUNTAS DE AUTO EVALUACIÓN

1) ¿Cómo se clasifican los triángulos de acuerdo a sus ángulos?

2) ¿Qué dice el Teorema de Pitágoras?

3) ¿A qué tipo de triángulos se puede aplicar el teorema de Pitágoras?

4) ¿Qué forma toma el teorema de Pitágoras en el caso de un triángulo oblicuángulo?

5) ¿Pueden ser utilizadas las funciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos?

6) ¿Cómo elegimos qué función trigonométrica utilizar al resolver un triángulo?

7) ¿Qué dice el teorema del coseno?

8) ¿Qué dice el teorema del seno?

9) ¿Cuándo utilizamos uno u otro teorema?

10) ¿Cómo se calcula el área de un triángulo?

11) ¿Para qué se utiliza la fórmula de Herón?. Explique sus términos.