TRABAJO PRÁCTICO: Trigonometría

Alumno: **J.T.P.:**

1. Calcular los ángulos complementarios de:

a) 23º 53´ 15,22"

90º - 23º 53´ 15,22" = 66º 6´ 44,78"

b) 72º 33´ 22,15"

90º - 72º 33´ 22,15" = 17º 26´ 37,85"

2. Calcular los ángulos suplementarios de:

a) 23º 53´ 15,22"

180º - 23º 53´ 15,22" = 156º 6´ 44,78"

b) 72º 33´ 22,15"

180º - 72º 33´ 22,15" = 107º 26´ 37,85"

3. Expresar en radianes (sistema radial o circular) los siguientes ángulos:

a) 23º 53´ 15,22"

360º ———— 2 π rad

23º 53´ 15,22" ———— $X = \frac{23º53º15.22º\ x\ 2\pi rad}{360º} = 0.1327\pi rad = 0.41691659\ rad$

b) $45^{G}\ 37^{M}\ 12^{S}$

400^{G} ———— 2 π rad

45.3712^{G} ———— $X = \frac{45.3712G\ x\ 2\pi rad}{400\ G} = 0.2268\pi rad = 0.712689143\ rad$

4. Expresar en grados centesimales los siguientes ángulos:

a) 23º 53´ 15,22"

360º ———— 400 G

23º 53´ 15,22" ———— $X = \frac{23º53º15.22º\ x\ 400G}{360º} = 26.54173445\ G\ = 26^{G}\ 54^{M}\ 17.34^{S}$

b) 1,5 ¶ Rad

2π rad ——— 400 G

1.5 π rad ——— $X = \frac{1.5\pi rad\ x\ 400G}{2\pi rad} = 300^{G}$

c) $\frac{2}{3}\pi Rad$

2π rad ——— 400 G

$\frac{2}{3}$ π rad ——— $X = \frac{2\pi rad\ x\ 400G}{3x2\pi rad} = 133.333333^{G} = 133^{G}\ 33^{M}\ 33.33^{S}$

5. Expresar en grados sexagesimales los siguientes ángulos:

a) $45^{G}\ 37^{M}\ 12^{S}$

400^{G} ——— 360^{o}

$45^{G}\ 37^{M}\ 12^{S}$ ——— $X = \frac{45.3712\ G\ x360^{o}}{400\ G} = 40^{o}\ 50'\ 2.69''$

b) 1 Rad

2 π rad ——— 360^{o}

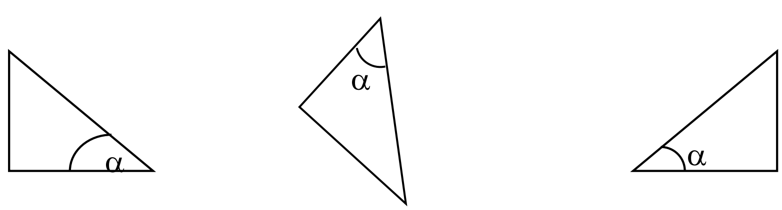
1 rad ——— $X = \frac{1\ rad\ x360^{o}}{2\pi\ rad} = 57^{o}\ 17'\ 44.81''$

c) $\frac{2}{3}\pi Rad$

2π rad ——— 360^{o}

$\frac{2}{3}$ π rad ——— $X = \frac{2\pi rad\ x\ 360^{o}}{3x2\pi rad} = 120^{o}$

6. Tomando como dato el ángulo α, marcar el cateto opuesto, el cateto adyacente y la hipotenusa para cada triángulo rectángulo. Resolución gráfica.



7. Calcular sen α, cos α y tg α para los siguientes datos. Graficar los triángulos y calcular el valor del ángulo α en cada caso.

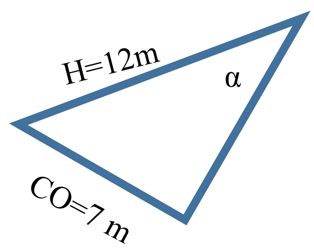
a) cateto opuesto = 7 m   hipotenusa = 12 m

sen α=CO/H= 7m/12m=0,5833..   arc. sen α= 35º 41´7,2"

cos α = CA/H=9,7467 m/12 m=0,812232862   arc. cos α= 35º 41´7,2"

CA=$\sqrt{H^2-CO^2}$=$\sqrt{(12m)^2-(7m)^2}$=9,7467m

tg α= CO/CA= 7m/9,7467 m= 0,718184846   arc. tg α = 35º 41´7,2"



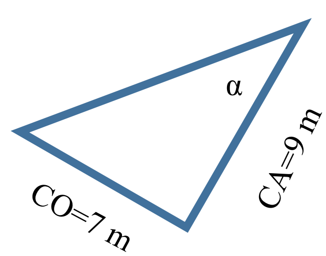
b) cateto opuesto = 7 m   cateto adyacente = 9 m

sen α=CO/H= 7m/11,4018cm =0,613940613   arc. sen α= 37º 52´29,94"

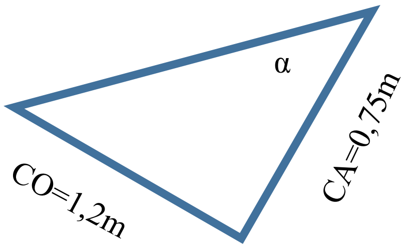
cos α = CA/H=9m/11,4018m =0,789352217   arc. cos α= 37º 52´29,94"

H=$\sqrt{CO^2+CA^2}$=$\sqrt{(7m)^2 \mp (9m)^2}$=11,4018m

tg α= CO/CA= 7m/9m= 0,7777777777……..   arc. tg α = 37º 52´29,94"



c) cateto adyacente = 75 cm   cateto opuesto = 1,2m



sen α=0,847998303   arc. sen α= 57º 59´39,96"

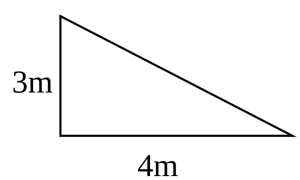
cos α =0,529998939   arc. cos α= 57º 59´39,96"

H=$\sqrt{CA^2 - CO^2}$=1,415 m

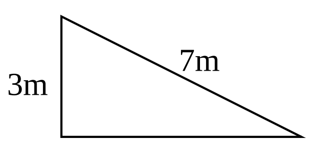
tg α= 1,6   arc. tg α= 57º 59´39,96"

α= 57º 59´39,96"

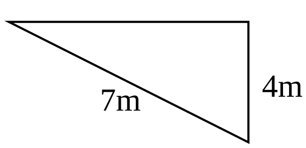
8. Utilizando el teorema de Pitágoras, calcular el o los lados desconocidos de los siguientes triángulos rectángulos.



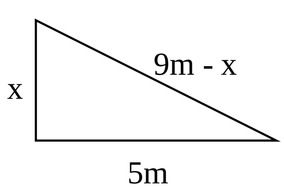
$\sqrt{a^2 + b^2}$=c $\sqrt{3^2 + 4^2}$=5m



$\sqrt{7^2 - 3^2}=\sqrt{40m}$



$\sqrt{7^2 - 4^2}$=$\sqrt{33}$m



$(9m-x)^2 = x^2 + (5m)^2$ Pitágoras

$(9m-x)^2= (9m-x).(9m-x)= 9m.9m -9m.x-x.9m+x^2= 81m^2-18m.x+x^2$

$81m^2-18mx+x^2= x^2 +25m^2$

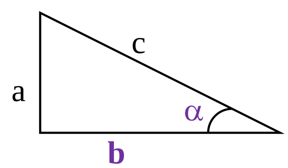
$81m^2-25m^2+x^2- x^2 =18m.x$

$56m^2= 18mx$

$X= 56m^2/18m= 3{,}1111111m$

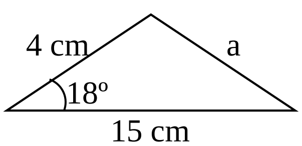
Lados desconocidos: X= 3,111111m 9-x= 5,8888m

9. Conocidos α **= 28º 15´ y b = 7 m**. calcular los lados **a** y **c. El triángulo de la figura es rectángulo.**



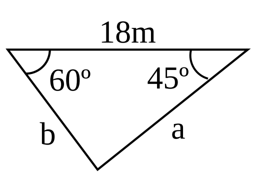
- No podemos utilizar Pitágoras porque solo conocemos un lado del triángulo.
- Recurrimos a las funciones trigonométricas:
- $\frac{b}{c}$ =cos α $\frac{7\,m}{c} = \boldsymbol{cos\ 28º15´}$ **c=**$\frac{7m}{cos\ 28º15´}$ **c=7,9465 m**
- $\frac{a}{b}$ =tg α $\frac{a}{7m} = \boldsymbol{tg\ 28º15´}$ **a=7m.** $\boldsymbol{tg\ 28º15}$ **a=3,7612 m**

10. En el triángulo **no** rectángulo de la figura, calcular el lado **a** utilizando el teorema del coseno.



- $a^2 = (4\ cm)^2+(15\ cm)^2- 2.(4\ cm).(15\ cm).\cos(18º)$
- a = 11,263801 cm

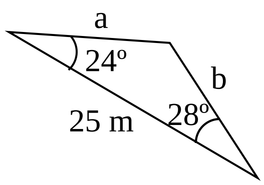
11. Calcular los lados del triángulo de la figura utilizando el teorema del seno.



$$\frac{a}{sen\ 60º} = \frac{b}{sen\ 45º} = \frac{18}{sen((180º - (45º + 60º))}$$

$$a = \frac{18m\ x\ sen\ 60º}{sen\ 75º} = 16.1383\ m \qquad b = \frac{18m\ x\ sen\ 45º}{sen\ 75º} = 13.1769m$$

12. Calcular el perímetro de la figura.

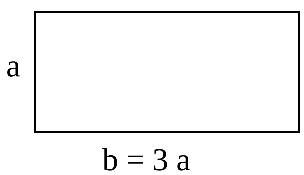


$$\frac{a}{sen\ 28º} = \frac{b}{sen\ 24º} = \frac{25\ m}{sen((180º-(24º+28º))}$$

$a = \frac{25m\ x\ sen28º}{sen\ 128º} = 14.8942m$ $b = \frac{25m\ x\ sen24º}{sen\ 128º} = 12.9039m$

Perímetro = 25m + 14.8942m + 12.9039m = 52.7981m

13. Calcular la diagonal del rectángulo sabiendo que el área es de 300 m^2.



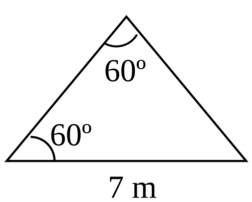
300 m^2 = a x (3a)

300 m^2 = 3 a^2

$a = \sqrt{\frac{300m^2}{3}} = \sqrt{100m^2} = 10\ m$ b = 3 x a = 3 x 10m = 30 m

Por Pitágoras: $diag = \sqrt{(10m)^2 + (30m)^2} = \sqrt{1000m^2} = 31.6227\ m$

14. Utilizando la fórmula de Herón calcular la superficie del siguiente triángulo



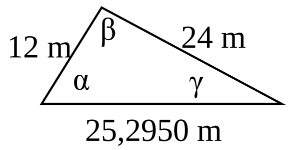
Por la propiedad de que a ángulos iguales corresponden lados iguales, serán todos los lados de 7m de longitud.

Semi perímetro $p = \frac{7m+7m+7m}{2} = 10.5m$

$\text{Sup} = \sqrt{p.(p-a).(p-n).(p-c)}$

$\text{Sup} = \sqrt{10.5m(10.5m-7m).(10.5m-7m).(10.5m-7m)} = 21.2176\ m^2$

15. Utilizando el teorema del coseno calcular los ángulos interiores del triángulo siguiente



$(25.2950m)^2 = (12m)^2+(24m)^2 - 2 \text{ x } 12m \text{ x } 24m \text{ x } \cos \beta$

$$\beta = \ arc\ coseno\ \left(\frac{(25.2950m)^2 - (12m)^2 - (24m)^2}{-2\ x\ 12m\ x\ 24m}\right) = 82º\ 0´\ 0.26"$$

$(12m)^2 = (25.2950m)^2+(24m)^2 - 2 \text{ x } 25.2950m \text{ x } 24m \text{ x } \cos \gamma$

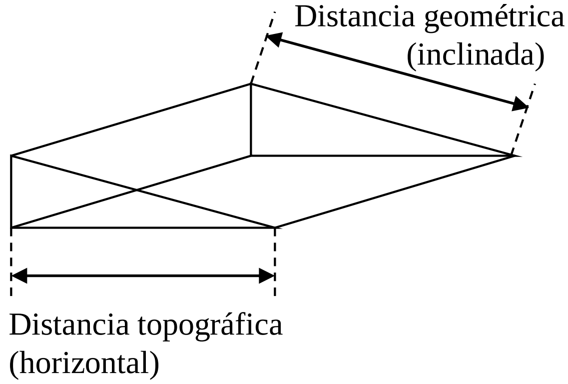
$$\gamma = \ arc\ coseno\ \left(\frac{(12m)^2 - (25.2950m)^2 - (24m)^2}{-2\ x\ 25.2950m\ x\ 24m}\right) = 28º\ 1´\ 13.36"$$

$(24m)^2 = (25.2950m)^2+(12m)^2 - 2 \text{ x } 25.2950m \text{ x } 12m \text{ x } \cos \alpha$

$$\alpha = \ arc\ coseno\ \left(\frac{(24m)^2 - (25.2950m)^2 - (12m)^2}{-2\ x\ 25.2950m\ x\ 12m}\right) = 69º\ 25´\ 46.44"$$

Comprobación = $\alpha + \beta + \gamma = 180º$

Aplicación en mediciones topográficas

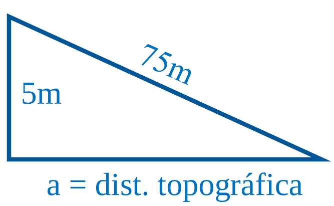


En los planos de mensura, de proyectos, de loteo, planchetas catastrales, etc. se consignan las distancias topográficas, es decir, medidas en su proyección sobre un plano horizontal.
En el terreno, la distancia que medimos con la cinta, es la distancia geométrica, que es la medida obtenida siguiendo la pendiente natural del terreno.

De esta manera, cuando tenemos en nuestras manos un plano de proyecto de una obra, o la plancheta catastral de la manzana donde está ubicada la obra, las medidas que allí leemos tanto lineales como superficies, corresponden a medidas proyectadas sobre un plano horizontal.

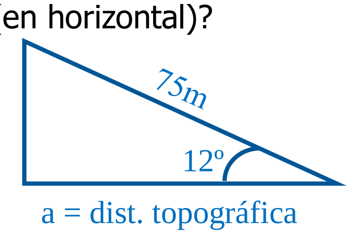
Los ejercicios que veremos a continuación relacionan las medidas reales, mensuradas en el terreno con las medidas topográficas (leídas en el plano).

16. En un terreno inclinado se midió con cinta la distancia entre dos puntos. El desnivel entre los puntos es de 5 metros. La longitud medida fue de 75 metros. ¿Cuál es la distancia topográfica (medida en horizontal)?



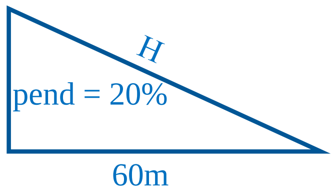
$$a = \sqrt{(75m)^2 - (5m)^2} = \sqrt{5600\ m^2} = 74.8331\ m$$

17. En un terreno inclinado se midió con cinta la distancia entre dos puntos. El terreno forma un ángulo vertical de 12º (medido entre el terreno natural y la horizontal). La longitud medida es de 75 metros. ¿Cuál es la distancia topográfica (en horizontal)?



$$cos12º = \frac{a}{75m} \rightarrow a = 75m\ x \cos 12º = 73.361\ m$$

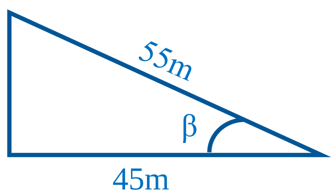
18. La distancia topográfica (en horizontal) entre dos puntos CD es de 60 metros. ¿Cuál es la distancia geométrica (en terreno natural) entre esos puntos si el terreno presenta una pendiente uniforme entre ellos del 20 %?



$$tg\ \alpha = \frac{20}{100} = 0.2 \ \rightarrow\ \alpha = arc\tan 0.2 = 11º\ 18´\ 35.76"$$

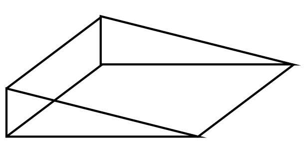
$$\cos 11º\ 18´\ 35.76" = \frac{60m}{H} \ \rightarrow\ H = \frac{60m}{\cos 11º\ 18´35.76"} = 61.188m$$

19. La distancia entre dos puntos del terreno, según planos, es de 45 metros. ¿Cuál es el ángulo vertical, si la distancia geométrica (en terreno natural) medida entre ellos es de 55 metros?



$$\cos\beta = \frac{45m}{55m} \ \rightarrow\ \beta = arc\cos\left(\frac{45m}{55m}\right) = 35º\ 5´\ 48.48"$$

20. La figura muestra un terreno rectangular con una pendiente uniforme entre frente y fondo del 15 %. Las medidas geométricas (en terreno natural) son de 12 metros de frente por 25 metros de fondo. ¿Cuál es la superficie del terreno que hay que consignar en el plano de mensura?



$$\tan\alpha = \frac{15}{100} = 0.15 \ \rightarrow\ \alpha = arc\tan 0.15 = 8º\ 31´50.76"$$

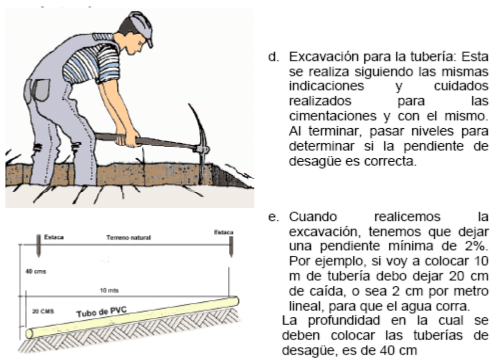
Sup terreno natural = 12m x 215m = 300m^2

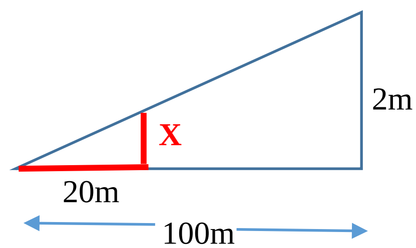
$$\cos 8º31´\ 50.76" = \frac{cat\ ady}{hipotenusa} = \frac{\sup proyectada}{\sup natural}$$

Sup proyectada = (12m x 25m) x cos 8º 31´ 50.76” = 296.68 m^2

Aplicación a la arquitectura

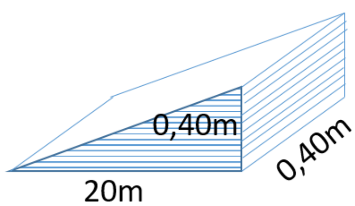
21. Cuál será el desnivel necesario para realizar esta instalación cloacal, si la pendiente requerida es del 2% y la longitud en planta mide 20 mts.?





$$\frac{2m}{100m} = \frac{X}{20m} \quad \rightarrow \quad X = \frac{2m\ x\ 20\ m}{100m} = 0.40\ m$$

22. ¿Cuantos metros cúbicos de tierra se deben extraer para colocar solo los metros de cañería definidos en el párrafo anterior, considerando que el ancho de la excavación será de 40 cm y considerando nula la tapada ?



$$Vol = Sup\ x\ prof = \frac{20m\ x\ 0.40m}{2}\ x\ 0.40m = 1.6\ m^3$$

23. ¿Qué porcentaje del volumen de un contenedor de 3 m^3 ocupará el material extraído?

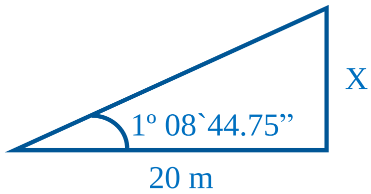
$$\frac{1.6\ m^3}{3\ m^3} = 0.5333 \quad \rightarrow \quad 53.33\ \%$$

Otra forma de calcularlo:

3 m^3 ---------------- 100 %

1.6 m^3 ------------- $X = \frac{1.6\ m^3\ x\ 100\%}{3\ m^3} = 53.33\ \%$

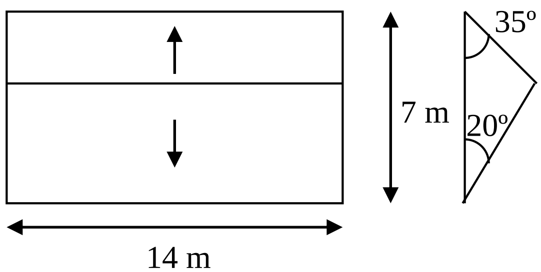
24. Si en lugar de conocer la pendiente se hubiera dado como dato el ángulo de inclinación de la cañería (1° 08´44,75”), ¿Cómo hubiera realizado los cálculos del ejercicio 21?



$$Tang\ 1º08´\ 44.75" \ = \frac{X}{20\ m}$$

X = 20m x Tang 1º08´44.75” = 0.40 m

25. Computar la cantidad de tejas coloniales necesarias para cubrir la construcción esquematizada, sabiendo que para 1 m^2 se necesitan 28 tejas y considerando un 5% de desperdicio.

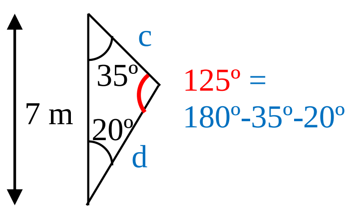


Por teorema del seno:

$$c = \frac{7m\ x\ sen20º}{sen125º} = 2.92\ m$$

$$d = \frac{7m\ x\ sen35º}{sen125º} = 4.90\ m$$

Sup. de cubierta = (2.92m + 4.90m) x 14m = 7.82m x 14m = 109.48m^2



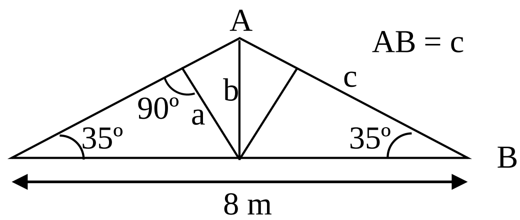
1 m^2 ---------- 28 tejas

109.48m^2 -----$X = \frac{109.48m^2 x28t}{1m^2} = 3065.44tejas$

Considerando el desperdicio del 5%:

3065.44tejas x 1.05 = 3218.71 tejas. Se adopta 3219 tejas.

26. Calcular la longitud de los tramos a, b y c de la cabriada graficada.



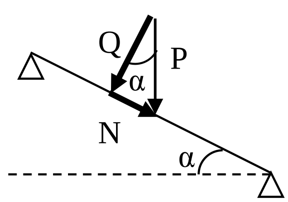
$$\cos 35º = \frac{4m}{c} \quad \rightarrow \quad c = \frac{4m}{\cos 35º} = 4.88\ m$$

$$\text{sen}\ 35º = \frac{a}{4m} \quad \rightarrow \quad a = 4m\ x\ sen\ 35º = 2.29\ m$$

$$\text{tang}\ 35º = \frac{b}{4m} \quad \rightarrow \quad b = 4m\ x\ tang\ 35º = 2.80\ m$$

Aplicación al cálculo de estructuras

En una viga inclinada, el peso propio del hormigón (P), por ser una acción gravitatoria, tiene dirección vertical. Al calcular una estructura, interesa la acción (carga) perpendicular a la viga para poder controlar la flexión, e interesa la acción (carga) en el sentido longitudinal de la viga, para poder controlar la compresión o la tracción de la misma.



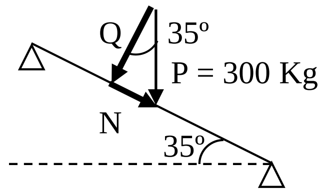
Para ello, se debe descomponer la carga P en esas dos direcciones. (proyectar la carga P sobre la perpendicular a la viga (Q) y sobre el sentido longitudinal (N).)

Si observamos el triángulo que se forma es:

$$\cos\alpha = \frac{Q}{P} \quad \Rightarrow \quad Q = P \times \cos\alpha$$

$$sen\alpha = \frac{N}{P} \quad \Rightarrow \quad N = P \times \text{sen}\ \alpha$$

27. En una viga inclinada, que forma un ángulo α = 35º con la horizontal, actúa la carga gravitatoria P = 300 Kg. Calcular las fuerzas Q y N



$$\cos 35º = \frac{Q}{300\ Kg} \quad \rightarrow \quad Q = 300Kg\ x\ cos\ 35º = 245.75\ Kg$$

$$\text{sen}\ 35º = \frac{N}{300\ Kg} \quad \rightarrow \quad N = 300Kg\ x\ sen\ 35º = 172.07\ Kg$$