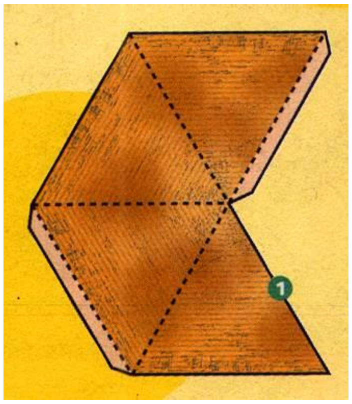
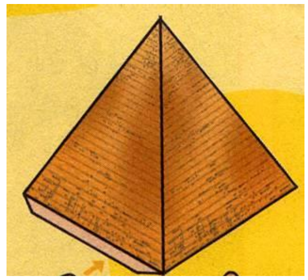
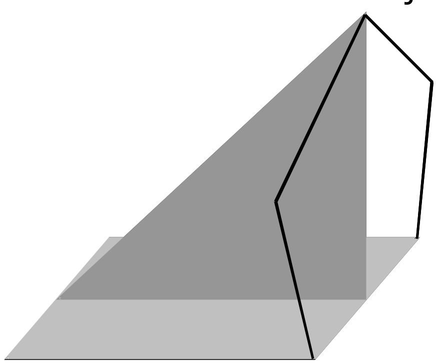
POLÍGONOS

Para calcular la cantidad de cartón necesaria para armar la pirámide de la siguiente figura necesitamos conocer cómo trabajar con los triángulos que la forman.

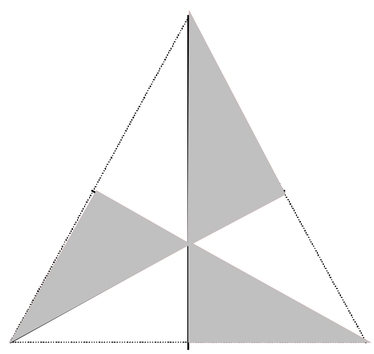




Para calcular la cantidad de madera necesaria para construir el apoya libros de la figura siguiente debemos conocer como trabajar con el triángulo, el rectángulo y el pentágono.



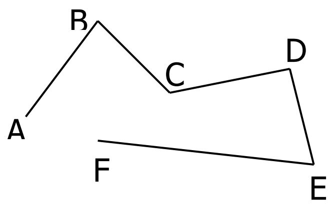
Para calcular el metal necesario para construir las cuchillas de procesadora de alimentos de la figura, necesitamos conocer cómo trabajar con triángulos.



Para realizar los cálculos mencionados debemos utilizar las herramientas que nos brinda la trigonometría y además conocer a fondo estas figuras llamadas polígonos, que a veces tendrán tres lados como en el triángulo, cuatro como en el rectángulo o más lados como veremos en las próximas páginas.

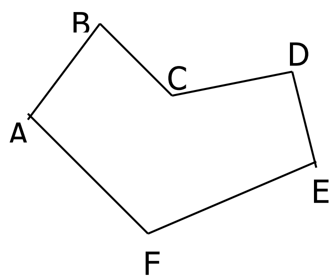
POLÍGONOS

MULTILÁTERO ABIERTO: Es un conjunto de segmentos consecutivos donde el primer punto (su origen) no coincide con su punto final.

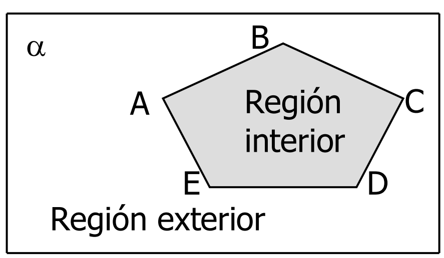


A no coincide con F

MULTILÁTERO CERRADO: es un conjunto de segmentos consecutivos donde el primer punto coincide con el último. (Son solamente los lados, sin incluir el área encerrada por ellos).

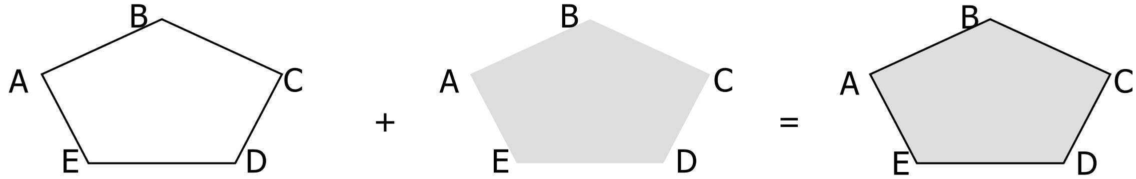


Todo *multilátero simple cerrado* separa el plano en dos regiones: una región interior y una región exterior.



Un multilátero simple determina un polígono simple.
La región interior se llama también *polígono abierto*.

La unión del *polígono abierto* y el *multilátero* se denomina *polígono cerrado*.

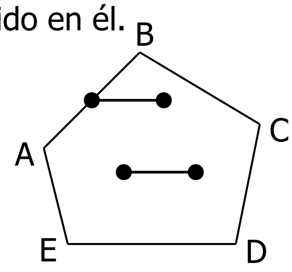


Multilátero ABCDE U polígono abierto ABCDE = polígono cerrado ABCDE

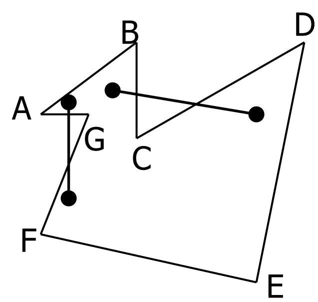
POLÍGONOS SIMPLES CONVEXOS Y CÓNCAVOS

Los polígonos simples pueden ser *convexos* y *cóncavos*.

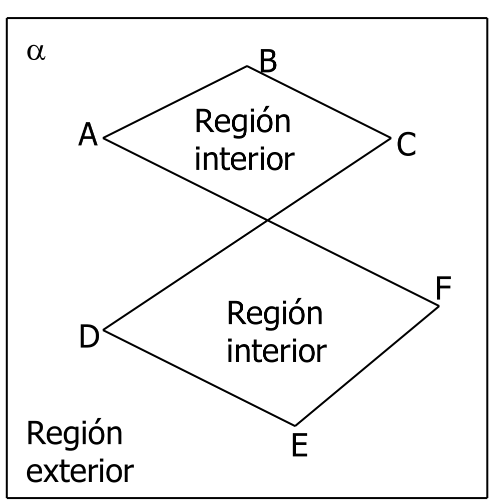
Polígono convexo: todo segmento determinado por un par de puntos del polígono está incluido en él.



Polígono cóncavo: existe algún segmento determinado por un par de puntos del polígono que no está incluido en él.

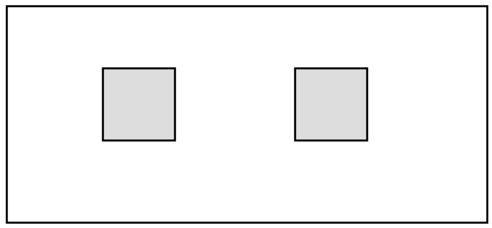


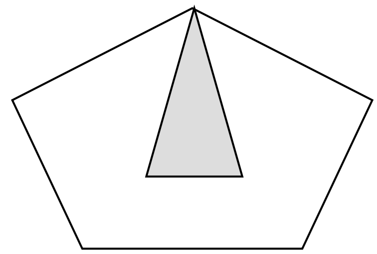
MULTILÁTEROS CRUZADOS: Un multilátero cruzado determina más de dos regiones en el plano.



ABCDEF = multilátero cruzado, determina dos regiones interiores y una exterio.

Existen otros polígonos "*con agujeros*" (No son polígonos simples)



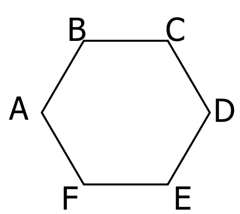


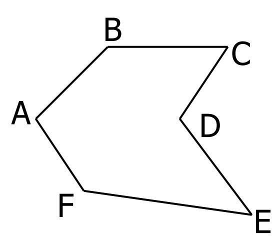
ELEMENTOS DEL POLÍGONO

Consideremos un conjunto ordenado de puntos, tales que no haya tres puntos consecutivos alineados:

{A, B, C, D, E, F}

Si se unen los puntos con segmentos, en el órden dado, y además se une el último con el primero, queda determinado un *polígono.*





Los puntos **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F** se llaman **vértices** del polígono.

En este ordenamiento distinguimos pares de puntos *consecutivos* y pares de puntos *no consecutivos*:

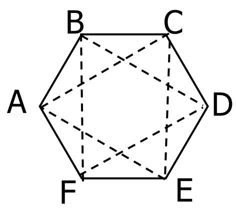
(A,B) (B,C) (C,D) (D,E) (E,F) (F,A) son pares de puntos *consecutivos.*

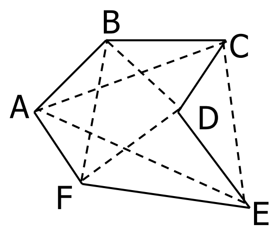
(A,C) (A,D) (B,D) (B,E) (C,E) (C,F) son pares de puntos *no consecutivos*.

Los segmentos determinados por pares de *vértices consecutivos* se llaman **lados** del polígono:

AB, BC, CD, DE, EF, FA son lados del polígono ABCDEF

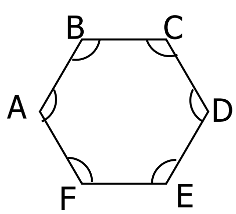
Los segmentos determinados por pares de *vértices no consecutivos* se llaman **diagonales** del polígono.





ÁNGULOS INTERIORES DE UN POLÍGONO

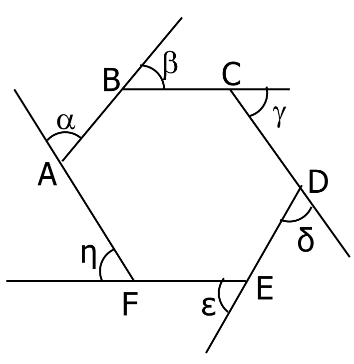
Los ángulos convexos formados por pares de lados consecutivos se llaman *ángulos interiores del polígono*.



En consecuencia, el polígono convexo ABCDEF puede definirse como la intersección de los ángulos convexos ABC, BCD, CDE, DEF, EFA y FAB.

ÁNGULOS EXTERIORES DE UN POLÍGONO

Los ángulos adyacentes a los interiores se llaman *ángulos exteriores del polígono.*

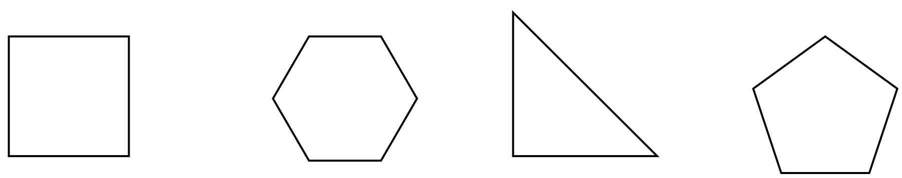


CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS SEGÚN EL NÚMERO DE LADOS

Nº de lados		Nombre	Nº de lados		Nombre
3	→	Triángulo	9	→	Eneágono
4	→	Cuadrilátero	10	→	Decágono
5	→	Pentágono	11	→	Undecágono
6	→	Hexágono	12	→	Dodecágono
7	→	Eptágono	15	→	Pentadecágono
8	→	Octógono	20	→	Icoságono

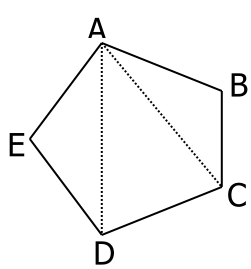
POLÍGONOS REGULARES

Cuando el polígono tiene todos sus lados iguales y sus ángulos iguales, se llama *polígono regular*.



PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS CONVEXOS

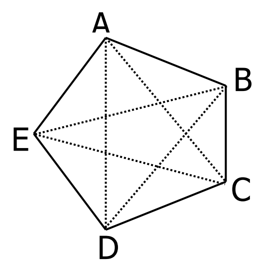
■ Número de diagonales que pasan por un vértice de un polígono



Cada vértice de un polígono determina una diagonal con cada vértice *no consecutivo.*
En consecuencia, para determinar el número de diagonales que pasan por un vértice **A** de un polígono de **"n"** lados, hay que descartar el mismo vértice **A** y los dos vértices consecutivos a él.
Es decir, que queda:

Nº de diagonales por un vértice = n - 3

■ Número de diagonales de un polígono



Por cada vértice pasan **n – 3** diagonales. Parece natural pensar que para calcular cuántas diagonales pasan por los **n** vértices es suficiente multiplicar **(n – 3) x n**, pero así estaríamos contando dos veces cada diagonal.

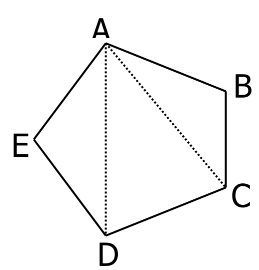
Supongamos un pentángono, será **n = 5**

(n – 3) x n = (5 – 3) x 5 = 10 diagonales

Pero vemos en el dibujo que son solo **5** diagonales, ya que la diagonal que pasa por **A** hacia **C**, es la misma que pasa por **C**; la que pasa por **A** hacia **D**, es la misma que pasa por **D**; de modo que:

$$\boxed{\text{Nº de diagonales del polígono} = \frac{n \times (n-3)}{2}}$$

■ Número de triángulos determinados por las diagonales que pasan por un vértice



El vértice **A** determina un triángulo con cada lado del polígono, exceptuando los dos lados que ienen por extremos al vértice **A**.

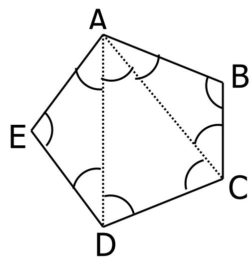
$\left.\begin{array}{l}\text{A con AB}\\ \text{A con EA}\end{array}\right\}$ no determina triángulos

$\left.\begin{array}{lcl}\text{A con BC} & \longrightarrow & \text{determina triángulo ABC}\\ \text{A con CD} & \longrightarrow & \text{determina triángulo ACD}\\ \text{A con DE} & \longrightarrow & \text{determina triángulo ADE}\end{array}\right\}$ 5 lados – 2 lados = 3 triángulos

En general:

$\boxed{\text{Nº de triángulos} = n - 2}$

■ Suma de los ángulos interiores de un polígono

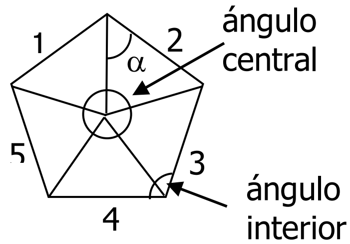


La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a la suma de los ángulos interiores de los triangulos determinados por las diagonales que pasan por un vértice.

La suma de ángulos interiores de un triángulo es **180º**, y el Nº de triángulos es **(n – 2)**, por lo tanto:

Suma de ángulos interiores de un polígono = 180º (n – 2)

En el caso de un polígono regular:



Áng. Central = $\frac{360^{\circ}}{n}$, en este caso $\frac{360^{\circ}}{5}$

Como se forman 5 triángulos iguales, cada triángulo tiene 180º como suma de ángulos interiores

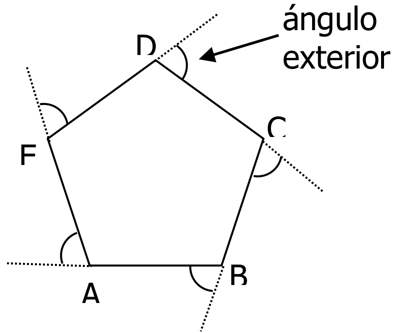
Ángulo interior de un triángulo: $\alpha = \dfrac{(180^{\circ} - \frac{360^{\circ}}{n})}{2}$

La fórmula vista es para calcular el ángulo interior de un triángulo (α); vemos que un ángulo interior del polígono regular es igual a 2 α.

También podemos calcular el valor de un ángulo interior del polígono con la siguiente fórmula:

Ángulo interior del polígono = $\dfrac{180^{\circ}(n-2)}{n}$

▪ Suma de os ángulos exteriores de un polígono



Como los ángulos exteriores son adyacentes a los interiores, en cada vértice, la suma de un exterior y el interior corrrespondiente es de 180º (por ser suplementarios).

Áng. Int. + Áng. Ext. = 180º en cada vértice

Como el polígono tiene **n** vértices, será:

Suma total de Áng. Interiores + Áng. Exteriores = 180º x n (a)

Pero: Suma Áng. Interiores = 180º (n – 2) (b)

Restamos (a) – (b):

Áng. Interiores + Áng. Exteriores – Áng. Interiores =
= 180º . n – [180º (n – 2)] =

= 180º . n [180º . n – 180º . 2] = 180º . n – 180º . n + 360º = 360º = 4 Rectos

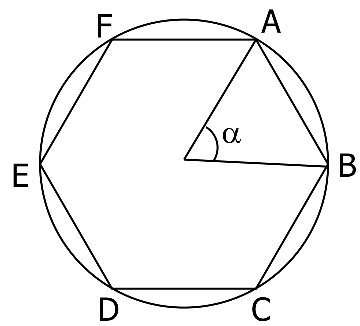
Vemos que la suma de ángulos exteriores es igual a 4 rectos. De aquí se desprende que en un polígono regular un ángulo exterior es igual a un ángulo central.

▪ Perímetro de un polígono

Es la suma de los lados del polígono. En el caso de un polígono regular, como todos los lados son iguales, el perímetro es igual a:

Perímetro = n . Lado

CONSTRUCCIÓN DE UN POLÍGONO REGULAR



Suma de ángulos centrales = 360º

$$\alpha = \frac{360^o}{n}$$

En el caso de un hexágono (n = 6), será:

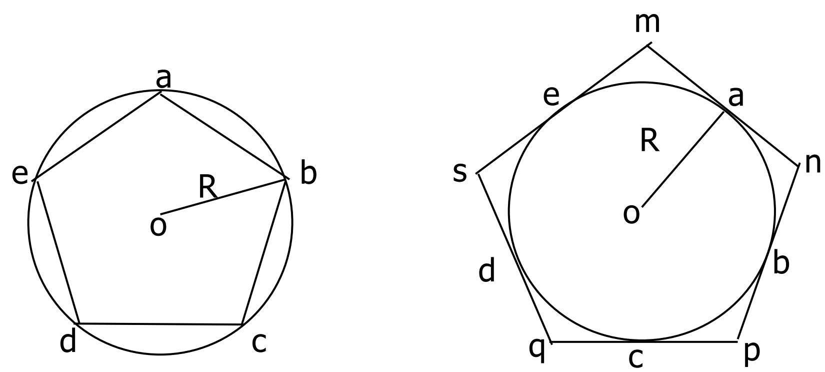
$$\alpha = \frac{360^o}{n} = \frac{360^o}{6} = 60^o$$

Se parte de un punto cualquiera del círculo, por ejemplo el **A**, y se traza el radio; luego se gira **60º** y se traza otro radio, encontrando así el punto **B** , luego se gira otros **60º** y se traza otro radio, ubicando **C** y así sucesivamente hasta tener todos los vértices. Finalmente se une los vértices y se tiene construído el hexágono, o cualquier polígono regular que se hubiese elegido.

Nota: el hexágono es el único polígono regular en que el lado es igual al radio.

Lado = Radio

POLÍGONOS INSCRIPTOS O CIRCUNSCRIPTOS A UNA CIRCUNFERENCIA



abcde inscripto en $Cf_{(o;R)}$ mnpqs circunscripto a $Cf_{(o;R)}$

Consideremos los puntos **a**, **b**, **c**, **d, e** pertenecientes a la circunferencia de centro **o** y radio **R**.: $Cf_{(o;R)}$.

1) Uniendo ordenadamente los puntos se obtiene un polígono convexo cuyos vértices pertenecen a la circunferencia.

Se dice que **abcde** es un *polígono inscripto* en la circunferencia, o bien que $Cf_{(o;R)}$ es una *circunferencia circunscripta* al polígono **abcde**.

La distancia del centro a cualquier vértice del polígono es igual al Radio.

$$\overline{oa} = \overline{ob} = \overline{oc} = \overline{od} = \overline{oe} = R$$

2) Si por los puntos **a**, **b**, **c**, **d, e** se trazan las tangentes a la circunferencia, se obtiene el polígono **mnpqs** cuyos lados son tangentes a la circunferencia.

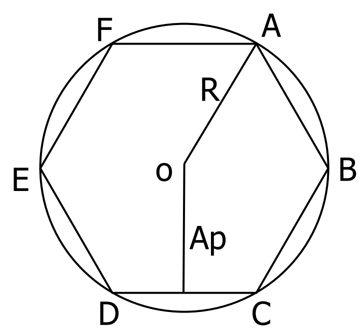
Se dice que **mnpqs** es un *polígono circunscripto* a la circunferencia, o bien que $Cf_{(o;R)}$ es la *circunferencia inscripta* en el polígono **mnpqs**.

La distancia del centro a cualquier lado del polígono es igual al radio de la circunferencia.

$$\overline{oa} = \overline{ob} = \overline{oc} = \overline{od} = \overline{oe} = R$$

CENTRO, RADIO Y APOTEMA DE UN POLÍGONO

Todo polígono regular se puede inscribir en una circunferencia.



- El centro de la circunferencia se llama *centro del polígono regular*.
- El radio de la circunferencia se llama *radio del polígono regular.*
- El centro del polígono regular equidista de los lados.
- La distancia del centro a uno cualquiera de los lados se llama *apotema del polígono regular.*

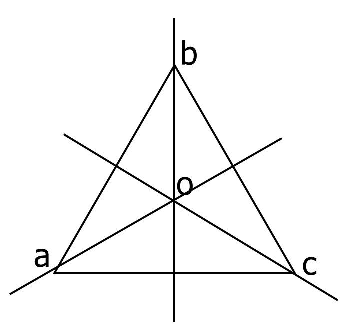
ELEMENTOS DE SIMETRÍA DE LOS POLÍGONOS REGULARES

■ Todo polígono regular de **n** lados tiene **n** ejes de simetría.

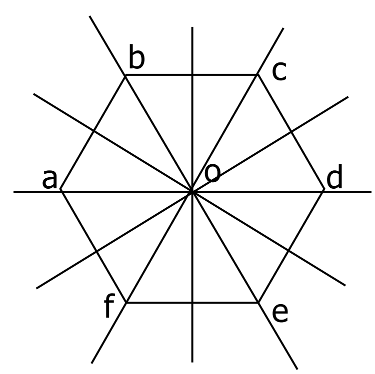
■ Si el número de lados es **par** los ejes de simetría son las rectas determinadas por los pares de vértices opuestos o por los puntos medios de los lados opuestos.

■ Si el número de lados es **impar** los ejes de simetría son las rectas determinadas por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.

■ Si el número de lados es **par**, el centro del polígono es centro de simetría.



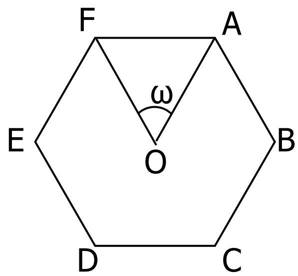
3 lados
3 ejes de simetría
o no es centro de simetría



6 lados
6 ejes de simetría
o es centro de simetría

Un polígono es regular si y solo si el número de ejes de simetría es igual al número de lados.

ÁNGULO CENTRAL



El ángulo que tiene por vértice el centro del polígono regular y que abarca un lado del mismo, se llama *ángulo central* del polígono.

Para un polígono regular de **n** lados el ángulo central es:

$$\Omega_n = \frac{4R}{n} = \frac{360^o}{n}$$

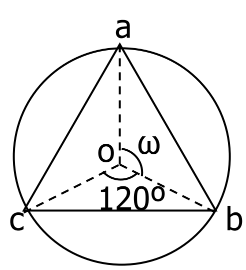
Ejemplo:

En el hexágono es **n** = 6 $\Rightarrow$ $\omega_6 = \frac{360^o}{6} = 60^o$

CONSTRUCCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES CON TRANSPORTADOR

Para construir un polígono regular de **n** lados inscripto en una circunferencia, usando el transportador, se construyen **n** ángulos consecutivos de vértice **o**, congruentes al ángulo central **ω** del polígono. Los puntos en que los lados de los ángulos cortan a la circunferencia son los vértices del polígono.

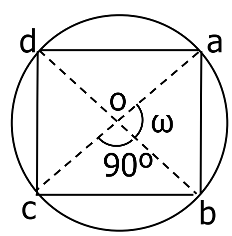
Triángulo equilátero



n = 3

$$\omega = \frac{360^o}{3} = 120^o$$

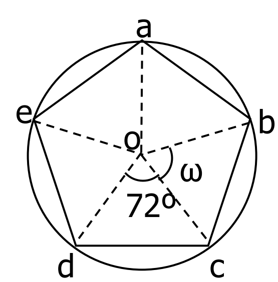
Cuadrado



n = 4

$$\omega = \frac{360^o}{4} = 90^o$$

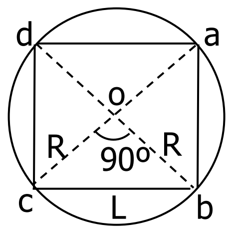
Pentágono



n = 5

$$\omega = \frac{360^o}{5} = 72^o$$

CÁLCULO DEL LADO Y DEL APOTEMA DEL CUADRADO



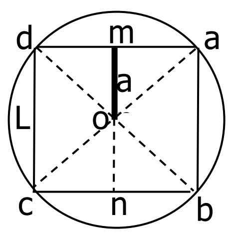
Cálculo del lado:

Usamos el teorema de Pitágoras: $L^2 = R^2 + R^2$

Como el triángulo **cob** es isósceles con **ob** = Radio de la circunferencia, es entonces:

$$L^2 = 2R^2 \Rightarrow L = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$$

Cálculo del apotema:



m = punto medio de $\overline{da}$

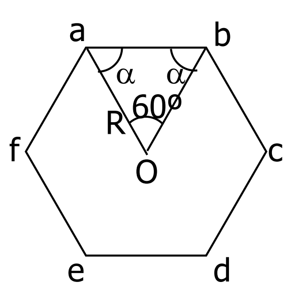
om = apotema

$\overline{mn}$ = 2 x apotema = **L**ado

y lado: $L = R\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $2 \times ap = R \times \sqrt{2}$

$$\Rightarrow ap = \frac{R \times \sqrt{2}}{2}$$

CÁLCULO DEL LADO Y DEL APOTEMA DEL HEXÁGONO EN FUNCIÓN DEL LADO

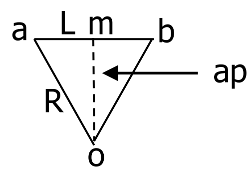


Cálculo del lado:

$2\alpha = 180º - 60º = 120º$

$$\alpha = \frac{120º}{2} = 60º$$

$$\frac{\overline{ab}}{sen 60º} = \frac{R}{sen\alpha} \Rightarrow \overline{ab} = R \times \frac{sen 60º}{sen 60º} = R = L$$



Cálculo del apotema:

$\overline{am} = \frac{L}{2}$

$R^2 = ap^2 + (\frac{L}{2})^2 = ap^2 + \frac{L^2}{4}$

$ap^2 = R^2 - \frac{L^2}{4}$

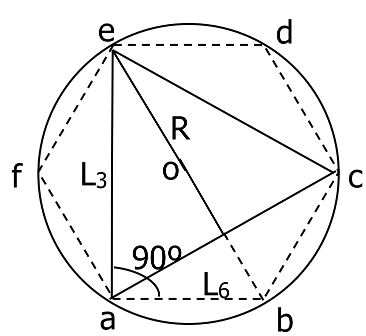
$ap = \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$

En el hexágono es R = L

$\Rightarrow \quad ap = \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{L^2 - \frac{L^2}{4}} = \sqrt{\frac{4L^2 - L^2}{4}} = \sqrt{\frac{3L^2}{4}}$

$\Rightarrow \quad ap = \sqrt{3} \times \frac{L}{2} = \frac{\sqrt{3} \times R}{2}$

CÁLCULO DEL LADO Y DEL APOTEMA DEL TRIÁNGULO EQUILÁTERO EN FUNCIÓN DEL RADIO



La recta que contiene la apotema, determina, en su intersección con la circunferencia, un vértice de un exágono inscripto en la circunferencia.
A su vez, forma un triángulo rectángulo de **base** = lado del hexágono (L_6) = **R**

altura = L_3

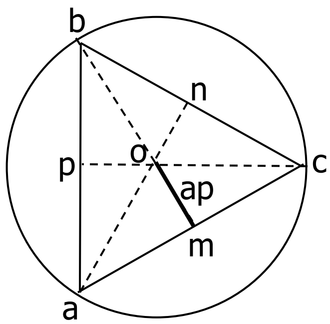
Hipotenusa = 2 R

De donde: $L_3 = \sqrt{(2R)^2 - {L_6}^2} = \sqrt{4R^2 - R^2}$

$L_3 = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}$

Con lo que ya calculamos el lado del triángulo.

<u>Cálculo del apotema</u>:



En un triángulo las medianas convergen en un punto **o**, distante $\frac{1}{3}$ de la base y $\frac{2}{3}$ del vértice opuesto.

Es decir que $\overline{ob} = \frac{2}{3}\overline{bm}$ y $\overline{om} = \frac{1}{3}\overline{bm}$

$\Rightarrow$ $\overline{bm} = \frac{3}{2}\overline{ob}$ $\overline{bm} = 3 \times \overline{om}$

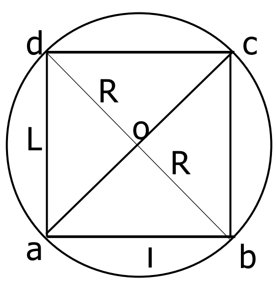
igualando: $\frac{3}{2}\overline{ob} = 3 \times \overline{om}$

$\Rightarrow$ $\overline{om} = \frac{3}{2 \times 3}\overline{ob} = \frac{1}{2}\overline{ob} = \frac{R}{2}$

Apotema = $\overline{om}$

Radio = $\overline{ob}$

<u>Ejercicio</u>: Dado un círculo de radio **R**, calcular el valor del **L**ado y del apotema del cuadrado inscripto en él.



Cálculo del lado:

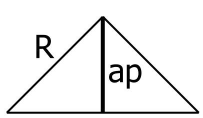
Aplicando el teorema de Pitágoras es:

$(R+R)^2 = L^2 + L^2$

es decir: $2L^2 = (2R)^2 = 4R^2$

$\Rightarrow$ $L^2 = \frac{4R^2}{2} = 2R^2$

$\Rightarrow$ $L = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$



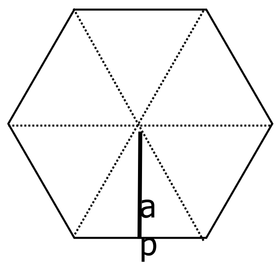
Cálculo del apotema:

$$R^2 = ap^2 + (\frac{L}{2})^2 \quad \Rightarrow \quad ap^2 = R^2 - (\frac{L}{2})^2 = R^2 - (\frac{R\sqrt{2}}{2})^2 = R^2 - \frac{R^2 2}{4}$$

$$ap^2 = \frac{4R^2 - 2R^2}{4} = \frac{2R^2}{4} = \frac{R^2}{2}$$

$$\Rightarrow ap = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

CÁLCULO DEL ÁREA DE UN POLÍGONO



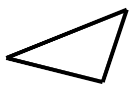
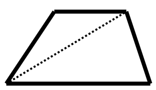
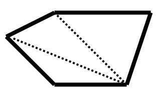
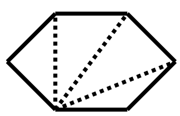
El área total de este hexágono la podemos asimilar al área de los seis triángulos que la componen.
Entonces calculamos el área de un triángulo, que por ser el caso de un hexágono es equilátero de lado L = Radio

Área de un triángulo = $A_{\nabla} = \dfrac{B \times h}{2} = \dfrac{L \times ap}{2}$

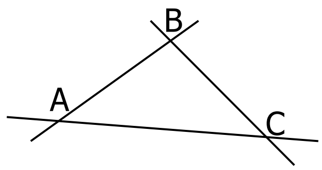
Área del polígono = $6 \times \dfrac{L \times ap}{2} = n \times \dfrac{L \times ap}{2}$

Y como **n x L** = perímetro del polígono, será entonces:

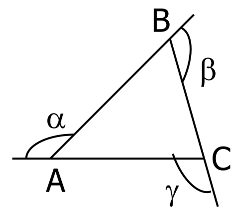
Área del polígono = $\dfrac{perímetro \times apotema}{2}$

Propiedades de los polígonos	Nº de Lados	Nº de Diagonales por un vértice	Nº total de Diago-nales	Nº de Trián-gulos	Suma de ángulos interiores	Suma de ángulos int. Y ext.	Suma de ángulos exteriores
	3	0	0	1	2R.1 = 2R	2R.3 = 6R	6R – 2R = 4R
	4	1	2	2	2R.2 = 4R	2R.4 = 8R	8R – 4R = 4R
	5	2	5	3	2R.3 = 6R	2R.5 = =10R	10R – 6R = 4R
	6	3	9	4	2R.4 = 8R	2R.6 = =12R	12R – 8R = 4R
Polígono de "n" lados	n	n - 3	$\frac{n(n-3)}{2}$	N - 2	2R (n - 2)	2R. n	2Rn - 2R (n - 2) = 2R [n- (n - 2)] = 2R (n – n + 2) = 4 R

TRIÁNGULOS



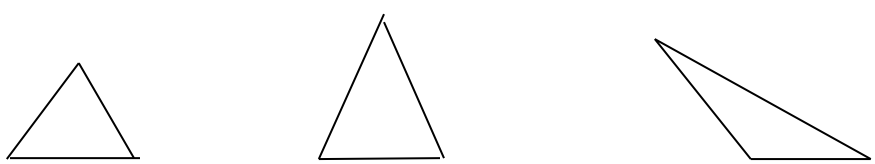
Dados en un plano tres puntos A, B, C no alineados, es decir, que no pertencen a la misma recta, se llama triángulo ABC a la figura formada por los puntos comunes a los ángulos convexos BAC, ABC y BCA, es decir, al conjunto de puntos intersección de los tres ángulos.



Los puntos A, B y C se llaman *vértices del triángulo*.
Los segmentos AB, BC y AC se llaman *lados*.
Los ángulos A, B y C se llaman *ángulos interiores del triángulo*.
Los ángulos α, β y γ se llaman *ángulos exteriores.*

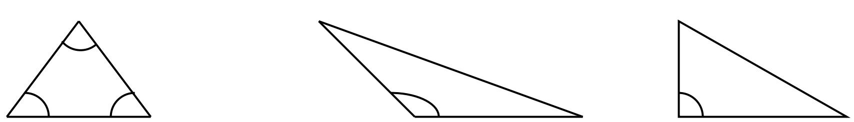
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Según sus lados
- Equiláteros: tres lados iguales
- Isósceles: dos lados iguales
- Escaleno: tres lados desiguales



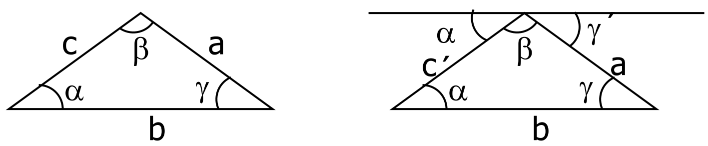
equilátero isósceles escaleno

Según sus ángulos
- Rectángulos: un ángulo es recto
- Oblicuángulos
  - Acutángulo: 3 ángulos agudos
  - Obtusángulo: 1 ángulo obtuso



Acutángulo Obtusángulo Rectángul

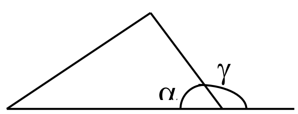
SUMA DE ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO



Si trazamos una paralela al lado **b**, podemos observar que se forman los ángulos $\alpha' = \alpha$ y $\gamma' = \gamma$ (por ser alternos internos entre paralelas)
Si sumamos:

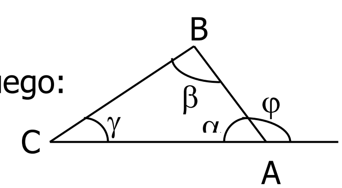
$$\alpha' + \beta + \gamma' = \alpha + \beta + \gamma = 180º$$

ÁNGULOS EXTERIORES



El ángulo exterior γ es adyacente al correspondiente ángulo interior α. La suma de ambos es 180º, por ser ángulos suplementarios.

• Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.



Siendo φ y α adyacentes, son suplementarios, luego:

$$\varphi + \alpha = 180º \Rightarrow \varphi = 180º - \alpha \quad (1)$$

Por otra parte:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180º \Rightarrow \alpha = 180º - \beta - \gamma \quad (2)$$

reemplazando (2) en (1):

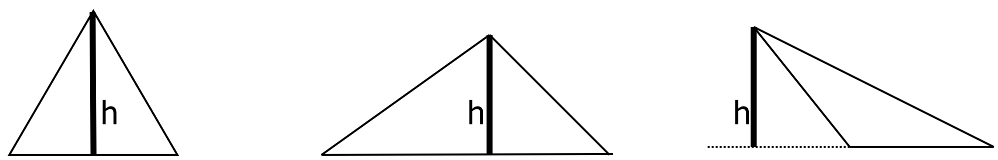
$$\varphi = 180º - \alpha = 180º - (180º - \beta - \gamma)$$

$$\varphi = 180º - 180º + \beta + \gamma$$

$$\varphi = \beta + \gamma$$

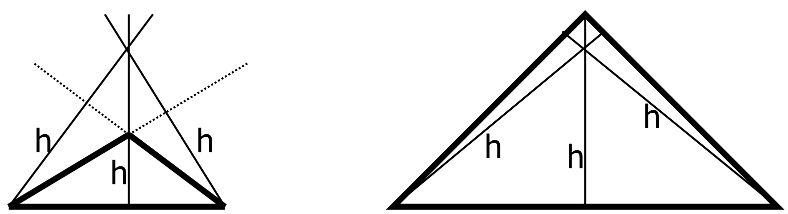
PARTES NOTABLES DE UN TRIÁNGULO

• **ALTURA**.: es la distancia del vértice de un triángulo a la recta a que pertenece el lado opuesto.

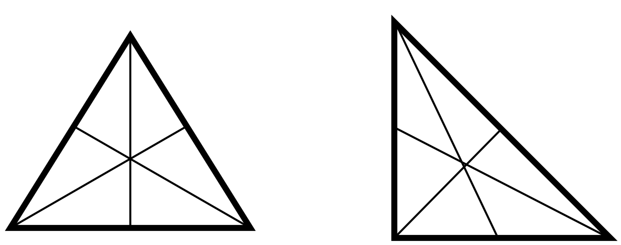


Vemos que la altura puede ser interior o exterior al triángulo, depende del tipo de triángulo y qué vértice utilicemos.

• En todo triángulo, las rectas que contienen a las alturas del mismo, se intersecan, a veces dentro del triángulo, a veces fuera de él.

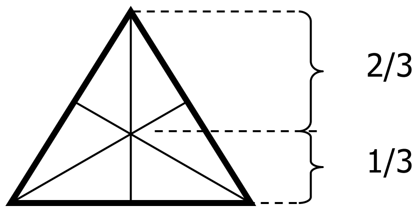


• **MEDIANAS**: Se llama mediana correspondiente a un lado al segmento determinado por el punto medio de ese lado y el vértice opuesto.



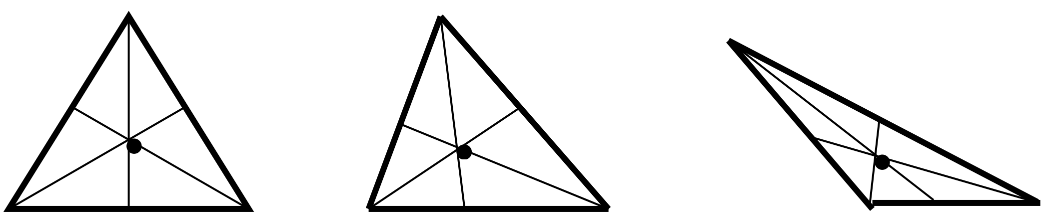
Las medianas de un triángulo se cortan en un punto interior al mismo, llamado *baricentro*.

Propiedad: las medianas de un triángulo se cortan en un punto cuya distancia a cada vértice es igual a dos tercios de la mediana correspondiente.

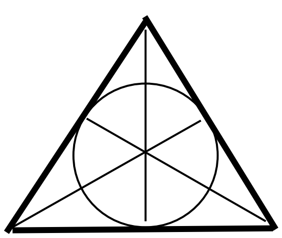


BISECTRIZ DE UN TRIÁNGULO

Se llaman bisectrices de un triángulo a los segmentos de bisectrices de sus ángulos comprendidos entre el vértice y el lado opuesto.



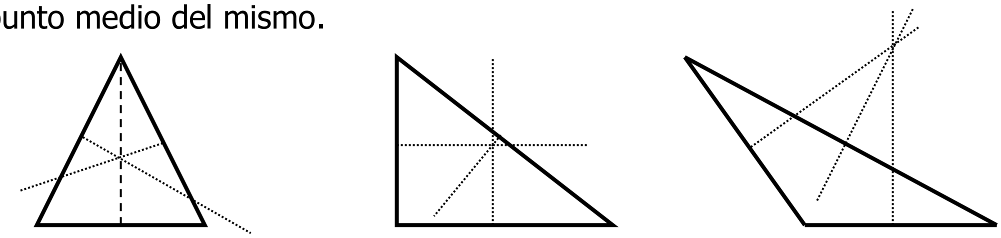
Propiedad: Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto que equidista de sus lados y se llama *incentro.*



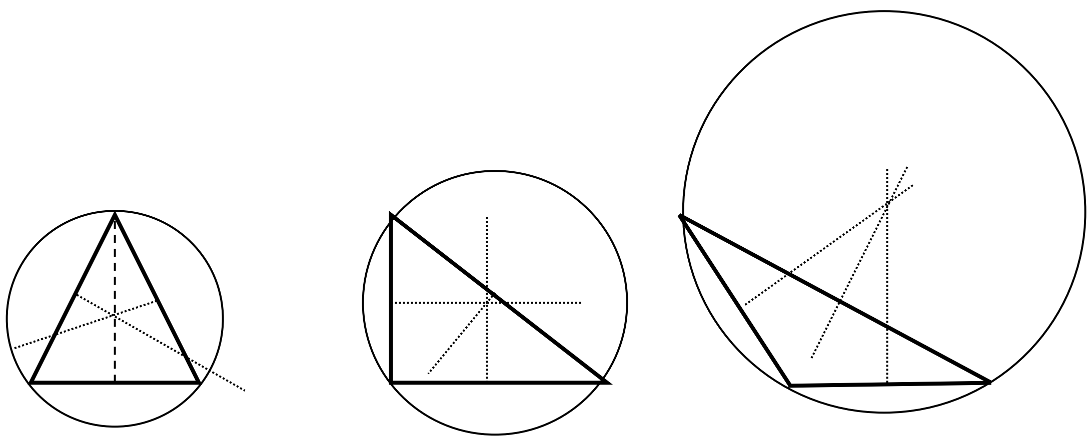
El incentro es el centro de una circunferencia *inscripta* en el triángulo. Los lados del triángulo son tangentes a la circunferencia. Vemos entonces que el incentro equidista de los lados del triángulo.

• MEDIATRICES DE UN TRIÁNGULO

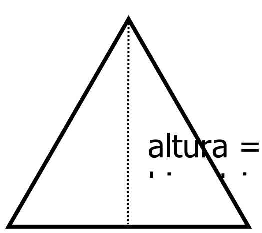
La mediatriz correspondiente a un lado, es la perpendicular a dicho lado, trazada por el punto medio del mismo.



Las mediatrices se cortan en un punto llamado *circuncentro*, y que es centro de una circunferencia *circunscripta* al triángulo.
El circuncentro equidista de los vértices, por ello la distancia del circuncentro al vértice es el radio de la circunferencia.

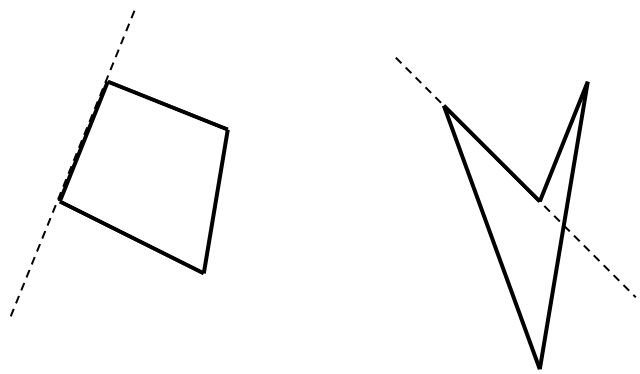


Nota: en un triángulo isósceles, la bisectriz, la mediana y la altura son iguales.



Ejercicios

1) Para reconocer si un polígono es convexo o cóncavo se puede dar un criterio particular.
   Se traza la recta correspondiente a cada lado. Si cada una de estas rectas deja a todos los puntos del polígono en un mismo semiplano, se dice que el polígono es *convexo*.
   Si alguna recta divide al polígono de tal modo que queden puntos del mismo en semiplanos opuestos, se dice que el polígono es *cóncavo*.



convexo cóncavo

2) ¿Cuántas diagonales puedes trazar en un triángulo?

Ninguna, las diagonales unen vértices no consecutivos, lo que no tenemos en el triángulo.

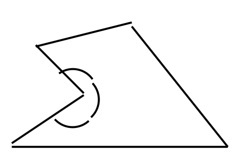
Nº de diagonales = Nº de vértices – 3 = 3 – 3 = 0

3) Escribe *todo*, *algún* o *ningún* según corresponda:

   a) *Algún* polígono simple es convexo.
   b) *Algún* polígono simple es cóncavo.
   c) *Ningún* multilátero cruzado es convexo.
   d) *Todo* multilátero cruzado es cóncavo.

4) Indica *Verdadero* o *Falso*:

V	Si un polígono es convexo, todos sus ángulos interiores son convexos.
F	Si un polígono es cóncavo, todos sus ángulos interiores son cóncavos.
V	Si un polígono es cóncavo, alguno de sus ángulos interiores es cóncavo.



5) Te informan que los ángulos exteriores de un polígono son congruentes.
¿Qué puedes decir de ese polígono?

Respuesta: que es un polígono regular

6) Calcula el número de diagonales que se pueden trazar **por un vértice** de un polígono:

a) de 9 lados $\longrightarrow$ Nº diag. = Nº vert – 3 = 9 – 3 = 6 diagonales

b) de 35 lados $\longrightarrow$ Nº diag. = Nº vert – 3 = 35 – 3 = 32 diagonales

7) Calcula el número **total de diagonales** de un polígono:

a) de 7 lados $\longrightarrow$ nº diag. = $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{7(7-3)}{2} = \frac{28}{2} = 14$ diagonales

b) de 12 lados $\longrightarrow$ nº diag. = $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{12(12-3)}{2} = \frac{108}{2} = 54$ diagonales

8) Por un vértice de un polígono se pueden trazar 5 diagonales. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Nº diag = Nº de vértices – 3 = 5 $\Rightarrow$ Nº de vert.. = 5 + 3 = 8 vért $\longrightarrow$ 8 lados

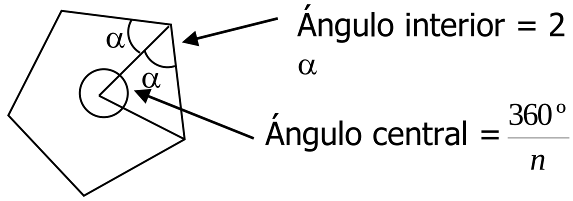
9) Calcula la suma de los ángulos interiores de un polígono de:

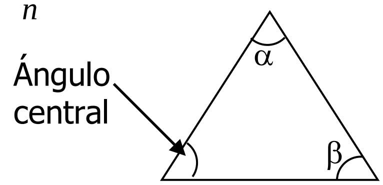
a) 5 lados $\longrightarrow$ suma áng. Int = 180º (n – 2) = 180º (5 – 2) = 540º

b) 8 lados $\longrightarrow$ suma áng. Int = 180º (n – 2) = 180º (8 – 2) = 1080º

c) 15 lados $\longrightarrow$ suma áng. Int = 180º (n – 2) = 180º (15 – 2) = 2340º

10) Calcula el valor de un ángulo interior de un polígono regular de:





Por ser polígono regular será $\beta = \alpha$

a) de 9 lados

ángulo central = $\frac{360^{\circ}}{n} = \frac{360^{\circ}}{9} = 40^{\circ}$ $\quad$ $2\alpha = \alpha + \beta = 180º - 40º = 140º$

ángulo interior = $2\alpha = 140º$ $\quad$ $\alpha = \frac{140^{\circ}}{2} = 70^{\circ}$

b) de 15 lados

ángulo central = $\frac{360^{\circ}}{n} = \frac{360^{\circ}}{15} = 24^{\circ}$ $\quad$ $2\alpha = \alpha + \beta = 180º - 25º = 156º$

ángulo interior = $2\alpha = 156º$ $\quad$ $\alpha = \frac{156^{\circ}}{2} = 78^{\circ}$

c) de 7 lados

ángulo central = $\frac{360^{\circ}}{n} = \frac{360^{\circ}}{7} = 51{,}4285^{\circ}$

$2\alpha = \alpha + \beta = 180º - 51{,}4285º = 128{,}57º$

ángulo interior = $2\alpha = 128{,}57º$ $\quad$ $\alpha = \frac{128{,}57^{\circ}}{2} = 64{,}2857^{\circ}$

1º ——— 60´

0,57º ——— $\frac{0{,}57 \times 60}{1} = 34{,}20´$

1´ ——— 60´´

0,20´ ——— $\frac{0{,}20 \times 60}{1} = 12´´$

$\boxed{\alpha = 128º\ 34´\ 12´´}$

11) Calcula en cada caso el número de lados del polígono y el valor de un ángulo interior.

Suma de áng. Int = 180º (n – 2) $\Rightarrow$ n = $\frac{suma}{180^o}+2$

$\alpha = \frac{(180^o - \frac{suma^o}{n})}{2}$

La suma de los ángulos interiores de un polígono regular es de:

a) 360º

Suma de áng. Int = 180º (n – 2) $\Rightarrow$ n = $\frac{suma}{180^o}+2$ = $\frac{360^o}{180^o}+2$ = 4 lados

$\alpha = \frac{360^o}{4}$ = 90º

b) 900º

Suma de áng. Int = 180º (n – 2) $\Rightarrow$ n = $\frac{suma}{180^o}+2$ = $\frac{900^o}{180^o}+2$ = 7 lados

$\alpha = \frac{900^o}{7}$ = 128,57º

c) 1620º

Suma de áng. Int = 180º (n – 2) $\Rightarrow$ n = $\frac{suma}{180^o}+2$ = $\frac{1620^o}{180^o}+2$ = 11 lados

$\alpha = \frac{1620^o}{11}$ = 147,27º

12) Calcula el valor de un ángulo exterior de un polígono regular de:

a) 8 lados

Suma ang. ext. = 180º . n – [180 (n – 2)] = 180 x 8 – [180 (8 – 2)] =
= 1440 – 1080 = 360º

$$1 \text{ ang. ext.} = \frac{suma}{n^{o}\, lados} = \frac{360^{o}}{8} = 45^{o}$$

b) 20 lados
Suma ang. ext. = 180º . n – [180 (n – 2)] = 180 x 20 – [180 (20 – 2)] =
= 3600 – 3240 = 360º

$$1 \text{ ang. ext.} = \frac{suma}{n^{o}\, lados} = \frac{360^{o}}{20} = 18^{o}$$

c) 11 lados

Suma ang. ext. = 180º . n – [180 (n – 2)] = 180 x 11 – [180 (11 – 2)] =
= 1480 – 1620 = 360º

$$1 \text{ ang. ext.} = \frac{suma}{n^{o}\, lados} = \frac{360^{o}}{11} = 32{,}7272^{o}$$

13) Calcula el número de lados de un polígono regular, donde cada ángulo exterior vale:

a) 20º

$$\text{áng. ext.} = \frac{360^{o}}{n} \Rightarrow n = \frac{360^{o}}{ang.ext.} = \frac{360^{o}}{20^{o}} = 18 \text{ lados}$$

b) 72º

$$\text{áng. ext.} = \frac{360^{o}}{n} \Rightarrow n = \frac{360^{o}}{ang.ext.} = \frac{360^{o}}{72^{o}} = 5 \text{ lados}$$

14) Si **a**, **b** y **c** son ángulos de un triángulo, dados a = 35º 12´ y b = 49º 46´ ¿Cuánto vale el ángulo c?

a + b + c = 180º $\Rightarrow$ c = 180º - a – b = 180º - (35º 12´ + 49º 46´) =
= 180º - 84º 58´ = 95º 2´

15) Dado un triángulo **abc** con:

$a = 5\,\alpha$
$b = 3\,\alpha$
$c = 4\,\alpha$

Calcula **a**, **b** y **c**

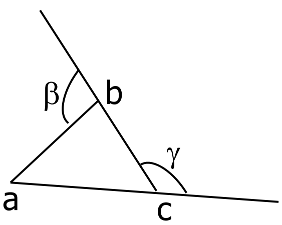
Sabemos que $a + b + c = 180º \Rightarrow 5\,\alpha + 3\,\alpha + 4\,\alpha = 180º$

$\Rightarrow 12\,\alpha = 180º$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{180º}{12} = 15º$

$\Rightarrow a = 5\,\alpha = 5 \times 15º = 75º$
$b = 3\,\alpha = 3 \times 15º = 45º$
$c = 4\,\alpha = 4 \times 15º = 60º$

16) Dados $\beta = 118º\,30´$ y $\gamma = 123º\,15´$ Calcula a, b y c

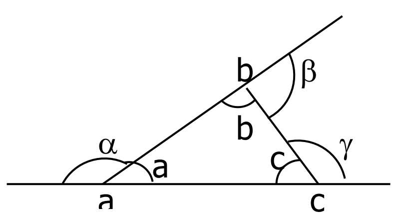


$b + \beta = 180º \Rightarrow b = 180º - \beta =$
$b = 180º - 118º\,30´ = 61º30´$

$c + \gamma = 180º \Rightarrow c = 180º - \gamma =$
$c = 180º - 123º15´ = 56º\,45´$

$a = 180º - (61º30´ + 56º\,45´) =$
$a = 180º - 118º15´ = 61º\,45´$

17) Demuestra que la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 4 Rectos.



$a + b + c = 180º$ (1)

$a + \alpha = 180º \Rightarrow a = 180º - \alpha$

$b + \beta = 180º \Rightarrow b = 180º - \beta$

$c + \gamma = 180º \Rightarrow c = 180º - \gamma$

Reemplazando en (1):

$a + b + c = 180º - \alpha + 180º - \beta + 180º - \gamma = 3 \times 180º -(\alpha + \beta +) = 180º$

$3 \times 180º = 180º + (\alpha + \beta + \gamma)$

$3 \times 180º - 180º = \alpha + \beta + \gamma$

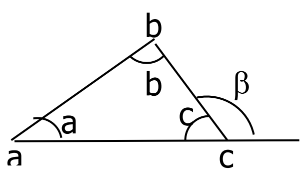
$2 \times 180º = (\alpha + \beta + \gamma) = 360º = 4$ Rectos

18) Dados α y β (ángulos exteriores del triángulo), calcular el tercer ángulo exterior γ.

$\alpha = 54º$ $\beta = 155º$

$\alpha + \beta + \gamma = 360º \Rightarrow \gamma = 360º - \alpha - \beta = 360º - 54º - 155º = 151º$

19) Dados a = 48º 22´ 32´´ y b = 3 a – 90º 34´ 35´´ Calcular b, c y β



3 a = 48º 22´ 32´´
x 3
144º 66´96´´
-60´´
1´ 36´´
144º 67´
-60´
145º 07´ → 145º 07´ 36´´

b = 3 a – 90º 34´ 35´´

145º 07´ 36´´ → 144º 67´
36´´
- 90º 34´ 35´´ - 90º 34´
35´´

$a + b + c = 180º \Rightarrow$ c = 180º - (a + b) = 180º - (48º22´32´´ + 54º33´01´´=

c = 180º - 102º 55´ 32´´ = 77º 4´28´´

β = 180º - c = 180º - 77º 4´28´´ = 102º 55´32´´

PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN

1) ¿Cómo determinamos si un polígono es convexo o cóncavo?

2) ¿Cuáles son los elementos de un polígono?

3) ¿Qué diferencia hay entre un polígono regular y uno irregular?

4) ¿Cuántas diagonales pasan por un vértice del polígono?

5) ¿Cómo calculo el número total de diagonales de un polígono?

6) ¿Cómo calculo cuántos triángulos determinan las diagonales de un polígono?

7) ¿Cómo calculo la suma de ángulos interiores de un polígono?

8) ¿Cómo calculo un ángulo interior de un polígono regular?

9) Dibujar un polígono y destacar su centro, apotema y radio.

10) ¿Cómo calculo el ángulo central de un polígono regular?

11) ¿Qué relación hay entre el ángulo central y el ángulo exterior de un polígono regular?

12) ¿Cómo determino cuántos polígonos estrellados puedo construir a partir de un polígono regular?

13) ¿Qué diferencia hay entre un polígono estrellado falso y uno verdadero?