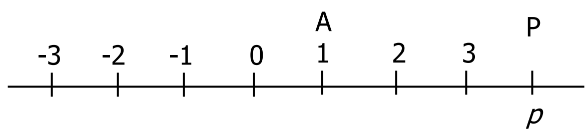
SISTEMA DE COORDENADAS EN EL PLANO

SISTEMA UNIDIMENSIONAL

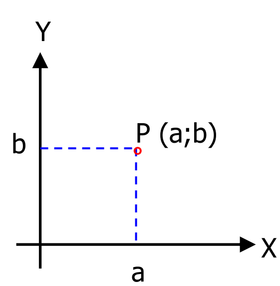
Es sabido que es posible asociar los números reales con los puntos de una recta y recíprocamente. Es lo que llamamos representar números reales en la recta numérica.



De manera que a cada número real le corresponde uno y solo un punto de la recta y recíprocamente. Se elige sobre la recta un punto arbitrario **o**, llamado **origen**, al que se le asocia el valor cero. Se asigna una dirección a la recta tomando la dirección positiva hacia la derecha, y negativa hacia la izquierda. Se elige un punto **A** al que se le asigna el valor 1 y que determinará la unidad de medida $\overline{OA}$.
Al número **p** asociado al punto **P** se le llama **coordenada de P**.

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ORTOGONALES

Basándose en la representación de los números reales, René Descartes (1596-1650) ideó un sistema de dos rectas perpendiculares cuyo origen se encuentra en el punto de intersección de las mismas. Este sistema se llama ***sistema cartesiano ortogonal***. Dichas rectas se llaman ejes coordenados.
Habitualmente al eje horizontal se lo llama **eje x**, y al eje vertical **eje y**. Sobre cada uno de ellos se elige, a partir del origen, una unidad, que puede o no ser la misma para **x** e **y**.



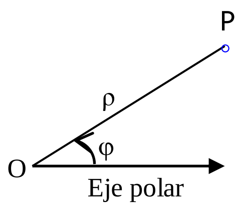
Las proyecciones de un punto cualquiera **P** del plano sobre cada uno de los ejes recibe el nombre de **coordenadas de P**. La proyección sobre el eje **x** será un número real **"a"** llamado **abscisa** y la proyección sobre el eje **y** será un número real **"b"** llamado **ordenada**.

Queda así establecida una correspondencia uno a uno entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales.

COORDENADAS POLARES EN EL PLANO

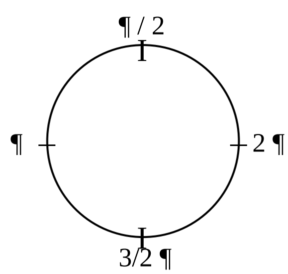
La posición de un punto en el plano puede quedar determinada no solo por las coordenadas cartesianas, sino también por el llamado sistema de coordenadas polares. Éste se emplea con frecuencia y es útil para la deducción de las ecuaciones de ciertas curvas que resultan sencillas referidas a un sistema polar.
(por ejemplo AutoCad trabaja así).

Se elige en el plano un punto **o**, llamado **polo** y una semirrecta llamada **eje polar**, con origen el punto **o**.



La posición de un punto **P** del plano se determina por dos números: ρ y $\boldsymbol{\varphi}$. El primero indica la distancia de **P** al polo y el segundo el ángulo formado por el segmento $\overline{OP}$ con el eje polar.

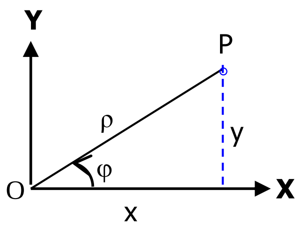
Como sentido positivo del ángulo se considera el contrario a las agujas del reloj. Los números ρ y φ se denominan **coordenadas polares** del punto **P**; en el polo $\rho = 0$ y φ puede tener cualquier valor. El radio vector ρ se considera siempre positivo. Si el ángulo φ varía entre $0 < \varphi < 2\pi$ a cada punto del plano, distinto del polo, le corresponde un par bien determinado de números ρ y φ. Si φ puede tomar cualquier valor, a cada punto del plano la corresponden infinitos pares de la forma $(\rho\ ,\ \varphi + k2\pi)$ con k perteneciente a Z (números enteros).



RELACIÓN ENTRE SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS Y POLARES

Si en el plano se consideran dos sistemas de coordenadas (coexistentes) uno polar y otro cartesiano ortogonal, de modo que el eje polar sea el semieje positivo de abscisas (x), esto permitirá establecer la relación entre las coordenadas de ambos sistemas.

Sea P un punto cualquiera del plano de coordenadas cartesianas ortogonales (x , y) y de coordenadas polares $(\rho\ ,\ \varphi)$.



De la figura se deduce:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\rho} \quad \Rightarrow \quad x = \rho \cdot \cos\varphi$$

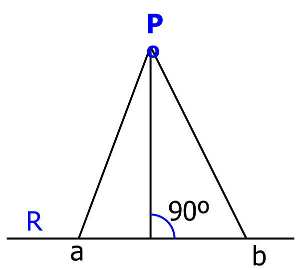
$$sen\varphi = \frac{y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad y = \rho \cdot sen\,\varphi$$

que permite, conocidas las coordenadas polares, encontrar las cartesianas. Recíprocamente, dadas las coordenadas cartesianas se pueden hallar las coordenadas polares mediante:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

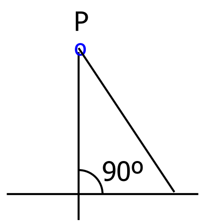
$$tg\,\varphi = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi = arc.tg\,\frac{y}{x}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



Sabemos que por un punto exterior a una recta **R** pasan infinitas rectas que la cortan y una sola paralela. De las rectas que la cortan existe una sola perpendicular a R. Las demás son oblicuas.
Se llama ***distancia*** de un punto a una recta, al segmento de perpendicular comprendido entre el punto y la recta.

En general, se llama distancia entre dos puntos, al segmento más corto que los una. (en el caso de punto y recta será la perpendicular).



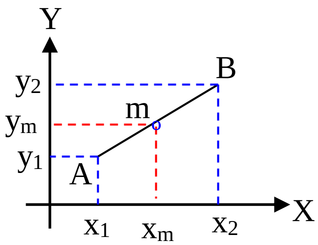
Si analizamos la figura veremos que cualquier recta oblicua será la hipotenusa de un triángulo rectángulo, que siempre es mayor que cualquier cateto del triángulo, por ende, el camino más corto posible entre **P** y la recta es su perpendicular.

En general, para hallar la distancia entre dos puntos **B** =(x , y) y **A**=(a , b) utilizaremos el teorema de Pitágoras:

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Cualquier punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento, por lo tanto donde la mediatriz corta al segmento tendremos su punto medio.



Supongamos dos puntos **B** =(x_2 , y_2) y **A**=(x_1 , y_1) y el punto medio entre ellos **m**.
Las coordenadas del punto medio **m** resultarán ser el promedio de las coordenadas en **x** e **y**,
es decir:

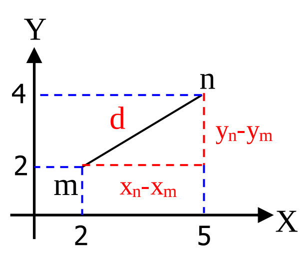
$$x_m = \frac{x_2 + x_1}{2} \qquad\qquad y_m = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

EJERCICIOS

COORDENADAS CARTESIANAS

1) En un sistema de coordenadas cartesianas, hallar la distancia entre los puntos siguientes:

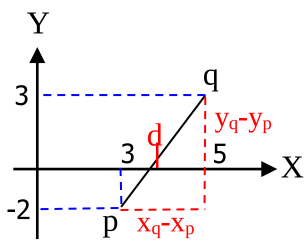
a) m = (2 ; 2) y n = (5 ; 4)



Vemos que se forma un triángulo rectángulo en el cual la distancia entre **m** y **n** es la hipotenusa, entonces:

$$d_{(m,n)} = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$
$$= \sqrt{(5-2)^2 + (4-2)^2} =$$
$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

b) p = (3 ; -2) y q = (5 ; 3)

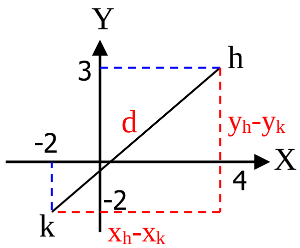


$$d_{(q,p)} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} =$$

$$= \sqrt{(5-3)^2 + (3-(-2))^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

c) k = (-2 ; -2) y h = (4 ; 3)

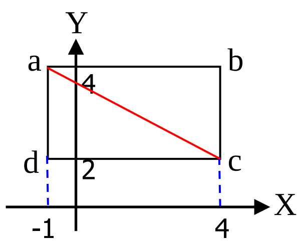


$$d_{(k,h)} = \sqrt{(x_h - x_k)^2 + (y_h - y_k)^2} =$$

$$= \sqrt{(4-(-2))^2 + (3-(-2))^2} =$$

$$= \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$$

2) Hallar la longitud de la diagonal del rectángulo de vértices:



a = (-1 ; 4) b = (4 ; 4)
c = (4 ; 2) d = (-1 ; 2)

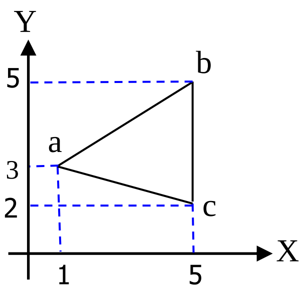
diagonal = $\overline{ac} = \overline{bd}$

$$dist_{(\overline{ac})} = \sqrt{(x_a - x_c)^2 + (y_a - y_c)^2} =$$

$$= \sqrt{(-1-4)^2 + (4-2)^2} =$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

3) Calcular el perímetro del triángulo de vértices:



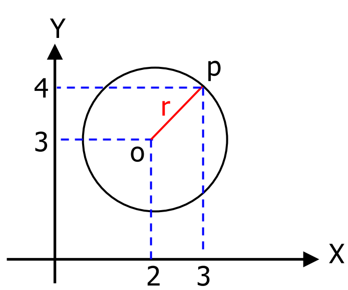
a = (1 ; 3) b = (5 ; 5) c = (5 ; 2)

Para calcular el perímetro, debemos primero conocer la longitud de los lados $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{ca}$

$$\overline{ab} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 4{,}47$$
$$\overline{bc} = \sqrt{(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2} = \sqrt{(5-5)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{0 + 3^2} = \sqrt{9} = 3$$
$$\overline{ca} = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} = 4{,}12$$

perímetro = $\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} =$ 4,47 + 3 + 4,12 = 11,59

4) Calcular la superficie del círculo de centro: o (2 ; 3) y un punto p (3 ; 4) perteneciente al círculo.



Radio = r = $\sqrt{(x_p - x_o)^2 + (y_p - y_o)^2} =$

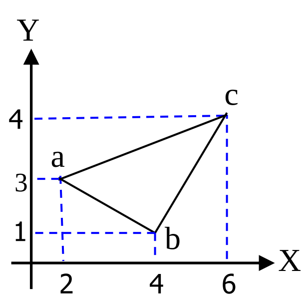
r = $\sqrt{(3-2)^2 + (4-3)^2} =$

r = $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Superficie = π . r^2 = 3,1416 . $(\sqrt{2})^2$ = 6,2832

5) Verificar si el triángulo de vértices: a = (2 ; 3) b = (4 ; 1) c = (6 ; 4) es isósceles, escaleno o equilátero.

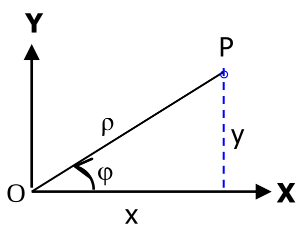
Para ello debo calcular $\overline{ac}, \overline{cb}, \overline{ab}$



$$\overline{ac} = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$
$$\overline{cb} = \sqrt{(x_b - x_c)^2 + (y_b - y_c)^2} = \sqrt{(4-6)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$
$$\overline{ab} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = \sqrt{(4-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Vemos que los tres lados tienen distintas longitudes, por lo tanto el triángulo es escaleno.

PASO DE COORDENADAS CARTESIANAS A POLARES Y VICEVERSA



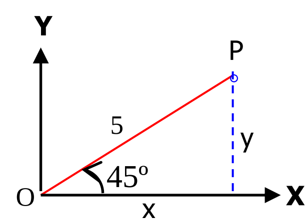
$$\frac{x}{\rho} = \cos\varphi \Rightarrow x = \rho.\cos\varphi$$

$$\frac{y}{\rho} = sen\varphi \Rightarrow y = \rho.sen\varphi$$

6) Dadas las coordenadas polares del punto hallar las coordenadas cartesianas.

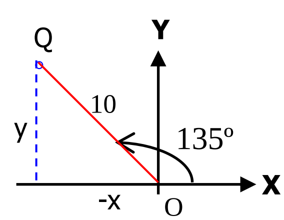
a) P = (ρ ; φ) = (5 ; 45º)

x = ρ . cos φ = 5 . cos 45º = 3,54
y = ρ . sen φ = 5 . sen 45º = 3,54



b) Q = (ρ ; φ) = (10 ; 135º)

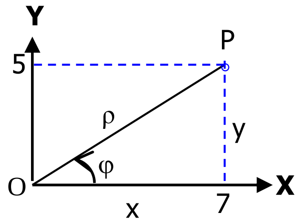
x = ρ . cos φ = 10 . cos 135º = -7,07
y = ρ . sen φ = 10 . sen 135º = 7,07



7) Dadas las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos, calcular las coordenadas polares.

a) A = (7 ; 5) b) B = (3 ; -2) c) C = (-3 ; -2)

a)



$$\varphi = arc.tg\,\frac{y}{x} = arc.tg\,\frac{5}{7} = 35^{o}32'15''$$

$$\frac{x}{\rho} = \cos\varphi \Rightarrow \rho = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{7}{\cos 35^{o}32'15''} = 8{,}60$$

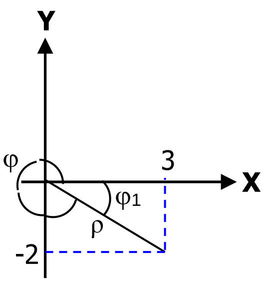
A = (8,60 ; 35º32´15”)

b) $\varphi_1 = arc.tg\,\frac{y}{x} = arc.tg\,\frac{-2}{3} = 33^{o}41'24''$

$\varphi = 360^{o} - 33^{o}\,41'\,24'' = 326^{o}\,18'\,36''$

$$\rho = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{3}{\cos 326^{o}18'36''} = 3{,}60$$

B = (3,60 ; 326º 18´ 36”)

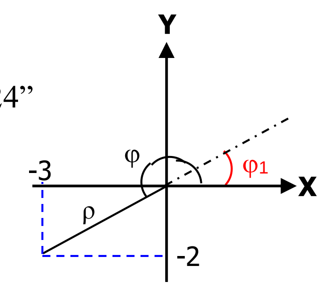


c) $\varphi_1 = arc.tg\,\frac{y}{x} = arc.tg\,\frac{-2}{-3} = 33^{o}41'24''$

$\varphi = 180^{o} + \varphi_1 = 180^{o} + 33^{o}\,41'\,24'' = 213^{o}\,41'\,24''$

$$\rho = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{-3}{-0{,}8321} = 3{,}60$$

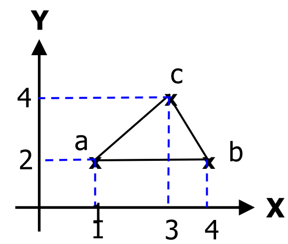
C = (3,60 ; 213º 41´ 24”)



8) Dado un triángulo cuyas coordenadas cartesianas de los vértices son:

a = (1 ; 2) b = (4 ; 2) c = (3 ; 4)

hallar las coordenadas polares de los vértices.

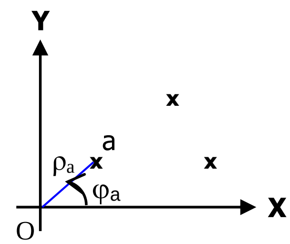


∢ ρ φ y

$$\varphi_a = arc.tg\,\frac{y}{x} = arc.tg\,\frac{2}{1} = 63°26´6''$$

$$\rho_a = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{1}{\cos 63°26´6''} = 2{,}24$$

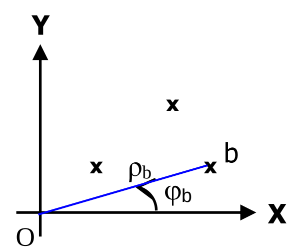
a = (2,24 ; 63º 26´ 6”)



$$\varphi_b = arc.tg\,\frac{y}{x} = arc.tg\,\frac{2}{4} = 26°33´54''$$

$$\rho_b = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{4}{\cos 26°33´54''} = 4{,}47$$

b = (4,47 ; 26º 33´ 54”)



$$\varphi_c = arc.tg\,\frac{y}{x} = arc.tg\,\frac{4}{3} = 53°7´48''$$

$$\rho_c = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{3}{\cos 53°7´48''} = 5$$

c = (5 ; 53º 7´ 48”)