RAZONES Y PROPORCIONES

Se llama razón entre dos números **a** y **b** (con b ≠ 0), al cociente de la división de **a** por **b**.

$$\frac{a}{b}$$

Por ejemplo, si digo que hay una computadora cada 20 alumnos estoy hablando de la razón de $\frac{1}{20}$.

Decir que hay una computadora cada 20 alumnos, equivale a decir que hay 3 computadoras cada 60 alumnos, o 5 cada 100.

Esto se expresa:

$$\frac{1}{20} = \frac{3}{60} = \frac{5}{100}$$

Podemos observar que la razón de 1 a 20 es igual que la de 3 a 60 y también a la de 5 a 100.

Proporción

La igualdad de dos razones se llama proporción

Por ejemplo:

$$\frac{1}{20} = \frac{3}{60}$$

Genéricamente:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ que se lee **a** es a **b** como **c** es a **d**

a y **d** se llaman *extremos* de la proporción

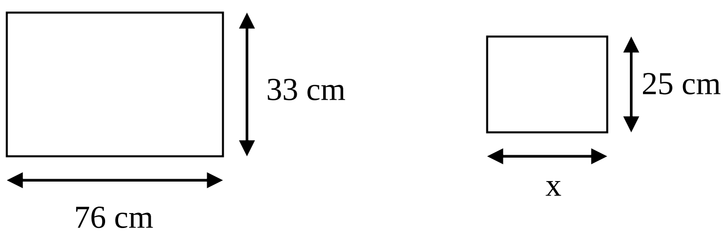
b y **c** se llaman *medios* de la proporción.

Propiedad: *En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

$$a \times d = b \times c$$

En nuestro ejemplo es: 1 x 60 = 20 x 3

Ejercicio: Tengo un tablero rectangular cuyo lado menor mide 33 cm y cuyo lado mayor mide 76 cm. Que medida deberá tener el lado mayor de otro tablero cuyo lado menor mide 25 cm para que se guarde la proporción entre ambos tableros



Aquí la proporción se expresa: $\frac{x}{25} = \frac{76}{33} \Rightarrow x = \frac{76cm \times 25cm}{33cm} = 57{,}57\,cm$

La podríamos haber planteado también de otra forma sin alterar el resultado, por ejemplo:

$$\frac{33}{76} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \times 76}{33} = 57{,}57$$

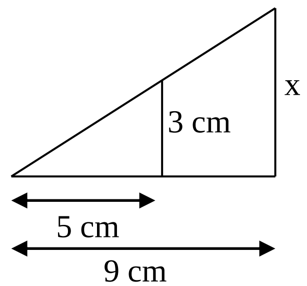
o bien:

$$\frac{25}{33} = \frac{x}{76} \Rightarrow x = \frac{25 \times 76}{33} = 57{,}57$$

Vemos que hay varias formas de expresar la misma proporción, solo debemos tener cuidado de no mezclar los datos.

Ejercicio:

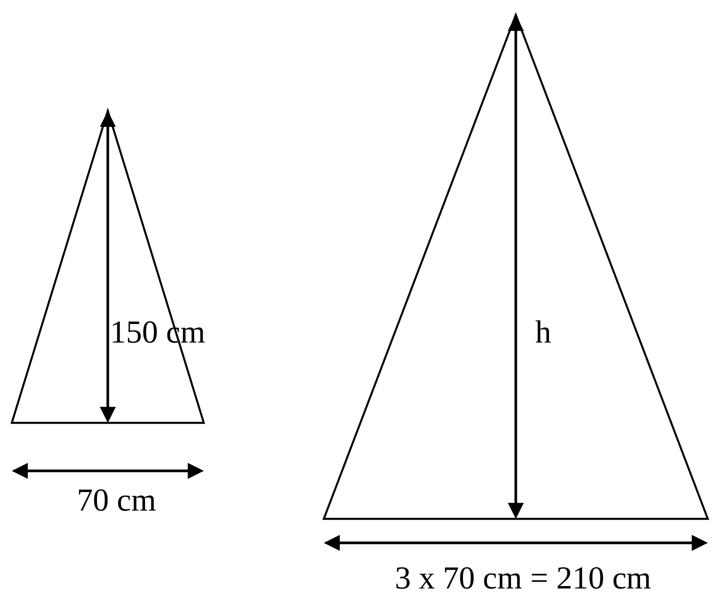
Tenemos un triángulo con catetos de 3 cm y 5 cm y lo queremos ampliar manteniendo la proporción pero llevando su cateto mayor a 9 cm. ¿Cuánto medirá su cateto menor?



$$\frac{x}{9cm} = \frac{3cm}{5cm} \Rightarrow x = \frac{3cm \times 9cm}{5cm} = 5{,}4cm$$

Ejercicio:

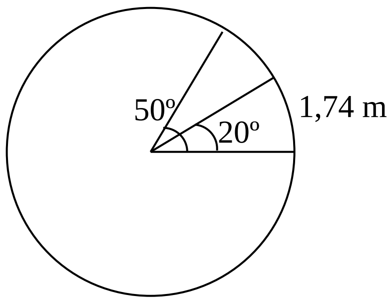
Si tengo un triángulo de base = 70 cm y altura = 150 cm y deseo ampliarlo triplicando la base pero manteniendo la proporcionalidad. ¿Cuánto medirá la altura del triángulo ampliado?



Aquí la proporción se expresará:

$$\frac{h}{210} = \frac{150}{70} \Rightarrow h = \frac{150 \times 210}{70} = 450\,cm$$

Ejercicio:
En el siguiente círculo, para un ángulo de 20º corresponde un arco de 1,74 m. ¿Qué arco corresponderá a un ángulo de 50º?

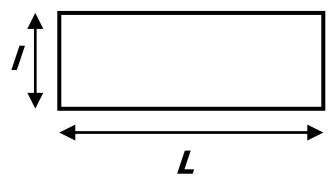


$$\frac{x}{50^{o}} = \frac{1{,}74}{20^{o}} \Rightarrow x = \frac{1{,}74 \times 50^{o}}{20^{o}} = 4{,}35m$$

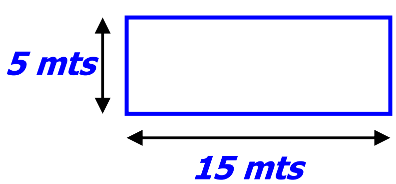
MÓDULO DE UN RECTÁNGULO

Se llama ***módulo*** de un rectángulo al cociente entre el lado mayor y el lado menor

$$M = \frac{L}{l}$$

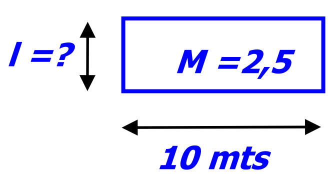


Ejemplo: Supongamos tener un rectángulo cuyo lado mayor mide 15 mts. y cuyo lado menor mide 5 metros. Determinar el módulo de dicho rectángulo.



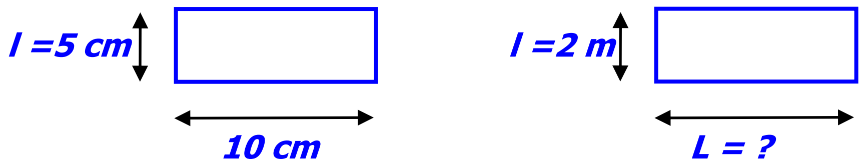
$$M = \frac{L}{l} = \frac{15}{5} = 3$$

Ejemplo: Si sabemos que el módulo de un rectángulo es igual a 2,5 y que su lado mayor mide 10 metros, calcular la dimensión de su lado menor.



$$M = 2{,}5 = \frac{10}{l} \Rightarrow l = \frac{10}{2.5} = 4$$

Ejemplo: Si sabemos que dos rectángulos tienen el mismo módulo y que las medidas de uno de ellos son 10 cm x 5 cm y del otro solo conocemos su lado menor que mide 2 metros. ¿Cuánto mide el lado mayor?

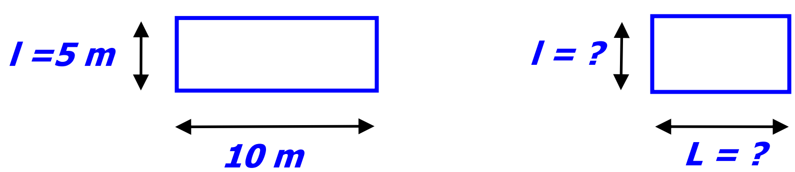


Cálculo primero el módulo del primero: $M = \frac{L}{l} = \frac{10cm}{5cm} = 2$

Como ambos rectángulos tienen el mismo módulo, que vale ***"2"*** según calculé, puedo plantear el módulo del segundo rectángulo y de allí despejar el valor del lado mayor:

$$M = 2 = \frac{L}{2m} \Rightarrow L = 2 \times 2m = 4metros$$

Problema: Tengo un rectángulo de 5 metros x 10 metros y otro rectángulo del cual se que su superficie es igual a la mitad de la del primer rectángulo y además el módulo es igual para ambos rectángulos. Calcular la medida de ambos lados del segundo rectángulo.



Aquí pareciera que faltan datos, ya que al plantear el módulo del segundo rectángulo compruebo que no conozco la medida de ninguno de los lados, es decir que tengo dos incógnitas para una sola ecuación.

Primero calculo la superficie del primer rectángulo: S = 5 m x 10 m = 50 m^2 .

A partir de ese dato, como se que el área del segundo rectángulo es igual a la mitad del primero, será:

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 50m^2 = 25m^2$$

Calculo ahora el módulo del primer rectángulo:

$$M = \frac{10m}{5m} = 2$$

Planteo el módulo del segundo rectángulo:

$$M = 2 = \frac{L}{l} \Rightarrow L = 2 \times l$$

implica que el lado mayor es dos veces el lado menor.

Al plantear el cálculo de superficie, que se que es igual a 25 m^2:

Sup = 25 m^2 = L x *l* Pero como se que L = (2 x *l*), reemplazo y queda:

25 m^2 = (2 x *l*) x *l* = 2 x l^2 de donde despejo ***"l"***

$$l^2 = \frac{25m^2}{2} = 12{,}5m^2 \Rightarrow l = \sqrt{12{,}5m^2} = 3{,}54m$$

Sabiendo que L = 2 x l será: L = 2 x 3,54 = 7,08 m.

En definitiva resultó el segundo rectángulo de 3,54 m x 7,08 m.

RECTÁNGULOS ESTÁTICOS Y DINÁMICOS:

El módulo de un rectángulo, que es el resultado del cociente entre la medida del lado mayor y el lado menor puede dar un número entero (por ejemplo M = 3), puede dar un número fraccionario (por ejemplo M = 2,5 o M = 2/3) o puede dar un número irracional (por ejemplo $M = \sqrt{3}$)

Llamaremos ***rectángulos estáticos*** a aquellos cuyo módulo sea un número ***racional***, esto es un entero o un fraccionario con un número finito de cifras periódicas.

Ejemplo: M = 10/3 M = 2 M = 0,5 M = 3,2253535353 $M = \sqrt{4} = 2$

Llamaremos ***rectángulos dinámicos*** a aquellos cuyo módulo sea un número ***irracional***, esto es un número decimal con infinitas cifras decimales no periódicas.

Ejemplo: $M = \sqrt{2}$ $M = \sqrt{3}$ M = ¶ = 3,14159265…..

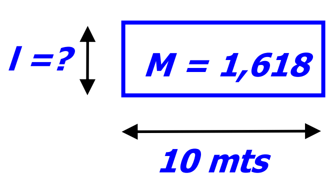
$$M = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989\ldots$$

De los módulos citados, en especial el último, (M = φ = 1,618) que se denomina módulo áureo, es muy utilizado por dar una proporción armónica.

Este tema se desarrolla más ampliamente en el apartado ***"Rectángulo áureo"*** tratado por la Ing. Cristina Avila.

La forma de utilizar estos módulos irracionales es la misma que hemos visto en los ejemplos anteriores.

Ejemplo: Si sabemos que el módulo de un rectángulo es igual a φ (módulo áureo) y que su lado mayor mide 10 metros, calcular la dimensión de su lado menor.



$$M = 1{,}618 = \frac{10}{l} \Rightarrow l = \frac{10}{1{,}618} = 6{,}18$$