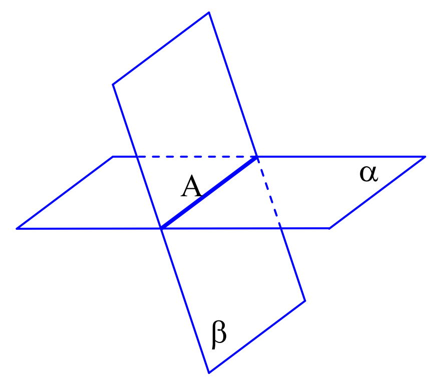
GEOMETRÍA DEL ESPACIO

La geometría plana estudia el conjunto de todos los puntos del plano, la geometría del espacio se refiere al conjunto de puntos del espacio, es decir que entramos ahora en tres dimensiones, por lo que tendremos cuerpos con volumen.

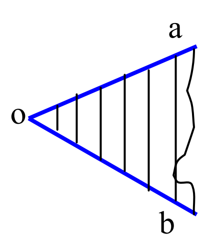
ANGULOS DIEDROS

Dos planos que se cortan determinan cuatro regiones en el espacio, cada una de las cuales se llama *ángulo diedro.*

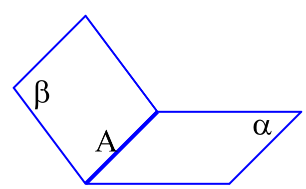


Existe una similitud entre los elementos de los ángulos planos y los de los ángulos diedros:

Ángulo plano



Ángulo diedro



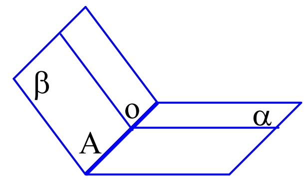
Ángulo $\widehat{aob}$ $\longleftrightarrow$ diedro $\widehat{\alpha\beta}$

Vértice o $\longleftrightarrow$ Arista A

Lados: semirrectas $\overrightarrow{oa}$ y $\overrightarrow{ob}$ $\longleftrightarrow$ caras: semiplanos α y β

SECCIÓN NORMAL DE UN DIEDRO

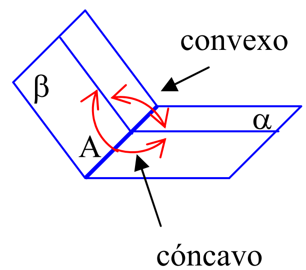
Veamos ahora como determinar la *amplitud* de un diedro.



Sea el diedro $\widehat{\alpha\beta}$ de arista **A** y **o** un punto de la arista. Por **o** se trazan las perpendiculares a la arista **A** en los planos α y β. El ángulo plano $\widehat{aob}$ que queda determinado se llama *sección normal del diedro.*
La amplitud de un diedro es la amplitud de su sección normal. Así, si un diedro es recto, la sección normal es un ángulo recto.

DIEDROS CONVEXOS Y CÓNCAVOS

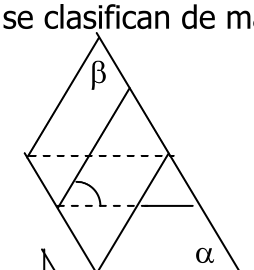
Las definiciones de diedro convexo y diedro cóncavo son similares a las de los ángulos planos convexos o cóncavos.



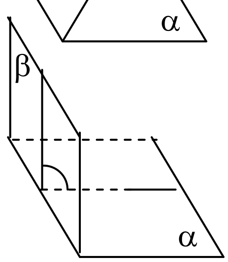
CLASIFICACIÓN DE DIEDROS:

Los ángulos diedros se clasifican de manera similar a los ángulos planos

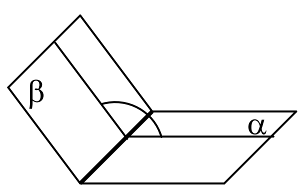
Diedros convexos



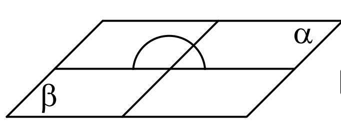
Diedro agudo: $\widehat{\alpha\beta}$ < 1 recto



Diedro recto: $\widehat{\alpha\beta}$ = 1 recto

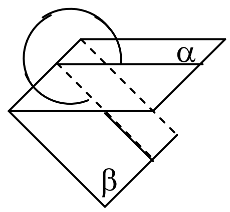


Diedro obtuso: $\widehat{\alpha\beta}$ > 1 recto



Diedro llano: $\widehat{\alpha\beta}$ = 2 rectos = 180º

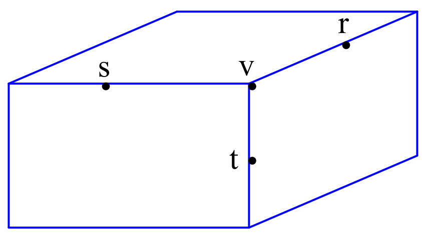
Diedro cóncavo



Diedro cóncavo: $\widehat{\alpha\beta}$ > 2 rectos

ÁNGULOS TRIEDROS

En cada vértice concurren tres planos que determinan un ángulo triedro



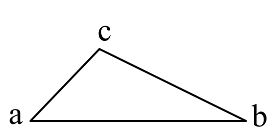
<u>Definición</u>: "Dadas tres semirrectas no coplanares $\overrightarrow{vr}, \overrightarrow{vs}, \overrightarrow{vt}$ se llama ángulo triedro a la figura formada por los puntos comunes a los diedros convexos de aristas **vr**, **vs** y **vt**."

Es decir, el ángulo triedro es la intersección de tres diedros cuyas aristas concurren en un punto.

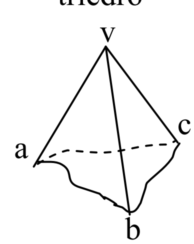
Así como existe una similitud entre las definiciones y propiedades de ángulos diedros y de ángulos planos, también existe una similitud entre las definiciones y propiedades de triángulos y triedros.

Observemos la correspondencia de elementos:

triángulo



triedro



Triángulo $\overset{\Delta}{abc}$ $\longleftrightarrow$ triedro tr. v, abc (v = vértice)

Vértices: a, b, c $\longleftrightarrow$ aristas $\overrightarrow{va}$, $\overrightarrow{vb}$, $\overrightarrow{vc}$

Lados: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ $\longleftrightarrow$ caras $a\hat{v}b$, $b\hat{v}c$, $c\hat{v}a$

Ángulos $a\hat{b}c$, $b\hat{c}a$, $c\hat{a}b$ $\longleftrightarrow$ diedros $d.\overrightarrow{va}$ $d.\overrightarrow{vb}$ $d.\overrightarrow{vc}$

vértice a opuesto a lado $\overline{bc}$ $\longleftrightarrow$ arista $\overrightarrow{va}$ opuesta a cara $b\hat{v}c$

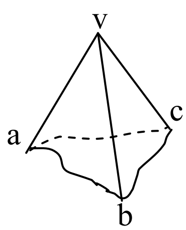
vértice b opuesto a lado $\overline{ac}$ $\longleftrightarrow$ arista $\overrightarrow{vb}$ opuesta a cara $a\hat{v}c$

vértice c opuesto a lado $\overline{ab}$ $\longleftrightarrow$ arista $\overrightarrow{vc}$ opuesta a cara $a\hat{v}b$

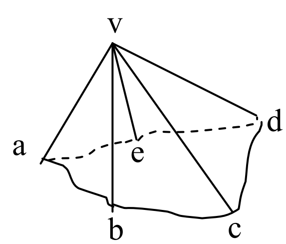
ÁNGULOS POLIEDROS

Así como en el plano, la definición de polígonos contiene a la de triángulo como un caso especial, en el espacio, la definición de poliedro contiene a la de triedro como caso particular.

triedro



poliedro



3 semirrectas no coplanares que tienen un mismo origen **v** determinan un ángulo triedro.

Tr. v. Abc

Vértice **v**

Aristas $\overrightarrow{\mathbf{va}}$, $\overrightarrow{\mathbf{vb}}$, $\overrightarrow{\mathbf{vc}}$

Caras $\mathbf{a\hat{v}b}$, $\mathbf{b\hat{v}c}$, $\mathbf{c\hat{v}a}$

3 o más semirrectas no coplanares que tienen un mismo origen **v** de- Terminan un ángulo poliedro.

ang. poliedro v. abc…n

Vértice **v**

Aristas $\overrightarrow{\mathbf{va}}$, $\overrightarrow{\mathbf{vb}}$, $\overrightarrow{\mathbf{vc}}$, $\overrightarrow{\mathbf{vd}}$ **...** $\overrightarrow{\mathbf{vn}}$

Caras $\mathbf{a\hat{v}b}$, $\mathbf{b\hat{v}c}$, $\mathbf{c\hat{v}d}$ **...** $\mathbf{n\hat{v}a}$

CUERPOS SÓLIDOS

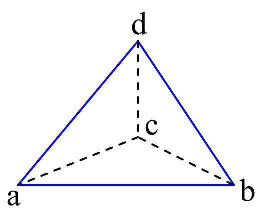
POLIEDROS

"Dados cuatro o más polígonos convexos tales que:

- dos cualesquiera de ellos no están en un mismo plano.
- Cada lados es común solamente a dos polígonos
- Y el plano de cada polígono deja a los demás en un mismo semiespacio

Se llama poliedro convexo a la figura formada por los puntos comunes a los semiespacios que contienen a dichos polígonos.

Ejemplo:

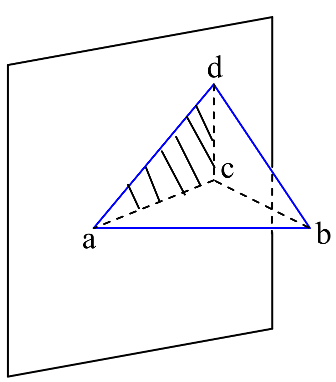


En el poliedro **abcd**

* polígonos convexos **abc**, **bcd**, **cda**, **abd**

* pl. abc ≠ pl.bcd ≠ pl.cda ≠ pl.abd

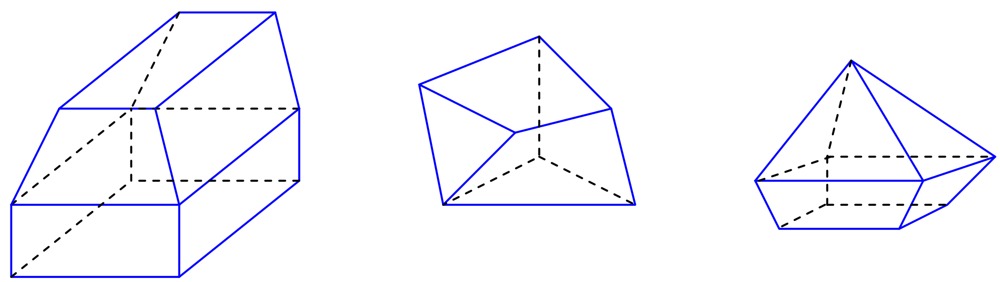
- $\overline{\mathbf{ab}}$ es común solo a $\overset{\Delta}{\mathbf{abc}}$ y $\overset{\Delta}{\mathbf{abd}}$
- $\overline{\mathbf{cb}}$ es común solo a $\overset{\Delta}{\mathbf{bcd}}$ y $\overset{\Delta}{\mathbf{abc}}$
- $\overline{\mathbf{ac}}$ es común solo a $\overset{\Delta}{\mathbf{abc}}$ y $\overset{\Delta}{\mathbf{acd}}$
- $\overline{\mathbf{dc}}$ es común solo a $\overset{\Delta}{\mathbf{bcd}}$ y $\overset{\Delta}{\mathbf{acd}}$



El plano de la cara **acd** deja a los demás polígonos en un mismo semiespacio.

- Los polígonos que generan el poliedro se llaman ***CARAS***
- Los lados de cada polígono se llaman ***ARISTAS DEL POLIEDRO***
- Los vértices de cada polígono se llaman ***VÉRTICES DEL POLIEDRO***

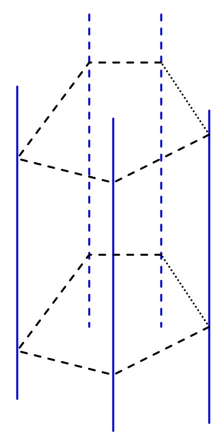
Otros ejemplos de poliedros son:



Veremos algunos poliedros particulares:

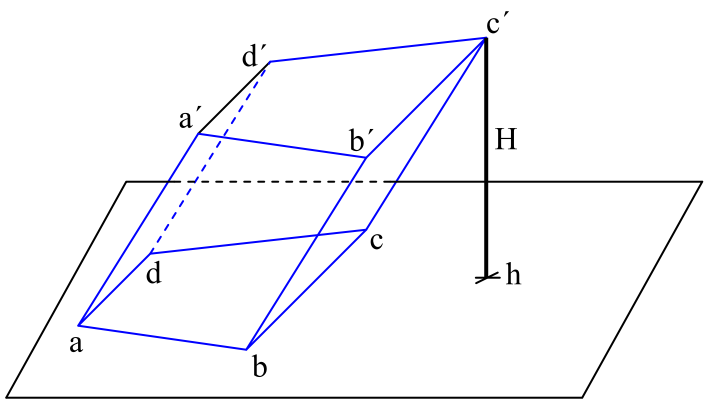
PRISMA INDEFINIDO

Consideremos un conjunto ordenado de tres o más Rectas paralelas, de modo que tres cualesquiera de ellas no sean coplanares y que el plano determinado por cada par de recta consecutivas deje a los demás en un mismo semiespacio.
La intersección de los semiespacios determinados por cada par de rectas consecutivas, que contienen a las restantes, se llama ***prisma indefinido***.



PRISMA

"Se llama ***prisma*** al conjunto formado por los puntos de un prisma indefinido comprendidos entre dos secciones paralelas y los puntos de dichas secciones", es decir que comprende todos los puntos de las caras laterales y también los puntos de las bases superior e inferior.



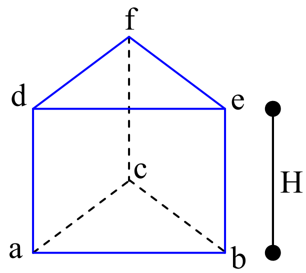
- Las secciones paralelas abcd y a´b´c´d´ se llaman **BASES** del prisma.
- Los cuadriláteros aa´b´b, bb´c´c, cc´d´d y dd´a´a se llaman **CARAS LATERALES** (y son paralelogramos)
- Los segmentos $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ y $\overline{dd'}$ se llaman **ARISTAS LATERALES** y por ser paralelas entre planos paralelos, son congruentes, es decir que $\overline{aa'} = \overline{bb'} = \overline{cc'} = \overline{dd'}$

- Los lados de las bases se llaman **ARISTAS DE LAS BASES** ($\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{da}$, $\overline{a'b'}$, $\overline{b'c'}$, $\overline{c'd'}$, $\overline{d'a'}$)
- Se llama **ALTURA** de un prisma a la distancia de un punto cualquiera de una base, al plano de la cara opuesta.

Por ejemplo, altura del prisma = $\overline{c'h}$ = H

PRISMA RECTO

Un prisma cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases se llama *prisma recto*.



Pr. abcdef es prisma recto

da $\perp$ pl. abc

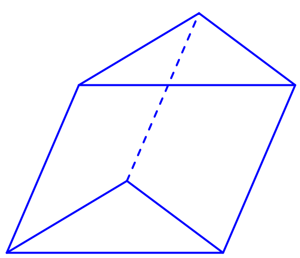
eb $\perp$ pl. abc

fc $\perp$ pl. abc

Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos. Las aristas del prisma recto son congruentes a la altura.

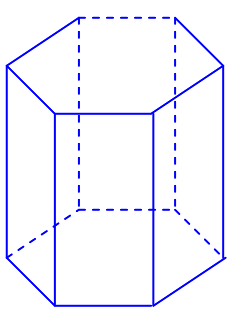
$$\overline{da} \cong \overline{eb} \cong \overline{fc} \cong H$$

En el caso de que las aristas laterales no sean perpendiculares al plano de la base, tenemos un ***PRISMA OBLICUO***



Aquí las caras laterales son paralelogramos

PRISMA RECTO REGULAR



Si la base de un prisma recto es un polígono regular, se dice que es un ***prisma recto regular.***

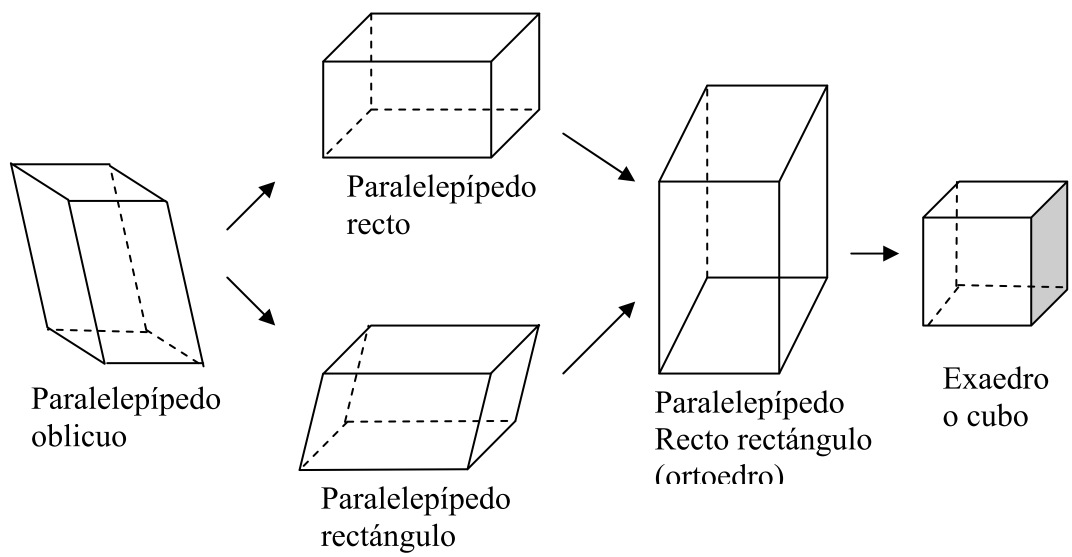
PARALELEPÍPEDO

Un prisma cuyas bases son paralelogramos se llama ***paralelepípedo***.

Como las caras laterales son paralelogramos, resulta que todas las caras de un paralelepípedo son paralelogramos.

Designación:

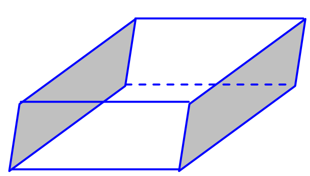
- Si las aristas son ***perpendiculares*** a la base es un ***paralelepípedo recto.***
- Si las bases son ***rectángulos*** se llama ***paralelepípedo rectángulo.***
- Si las aristas son perpendiculares a las bases y las bases son rectángulos es un ***paralelepípedo recto rectángulo***, también llamado ***ortoedro.***
- Como caso particular del ortoedro se obtiene el ***exaedro** o **cubo***, cuyas caras son cuadradas.



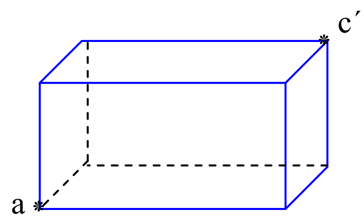
ELEMENTOS DEL PARALELEPÍPEDO

En el paralelepípedo distinguimos los siguientes elementos:

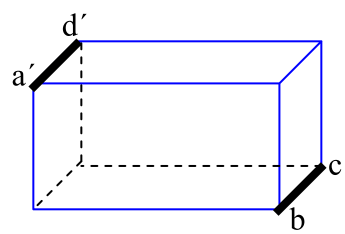
- ***caras opuestas*** son los pares de caras sin puntos comunes



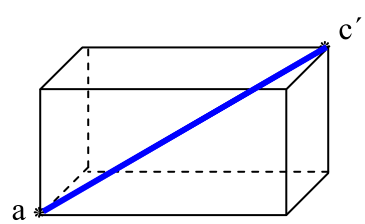
- ***vértices opuestos*** son los que no pertenecen a una misma cara



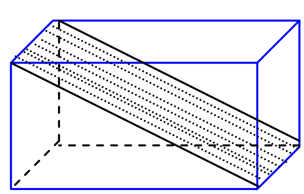
- ***aristas opuestas*** son las aristas paralelas que no están incluidas en una misma cara



- ***diagonales*** de un paralelepípedo son los segmentos determinados por cada para de vértices opuestos



- ***planos diagonales*** de un paralelepípedo son los planos determinados por cada par de aristas opuestas



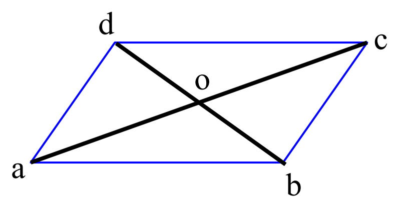
PROPIEDADES

Las propiedades de las diagonales de los paralelepípedos son similares a las propiedades de las diagonales de sus caras.

CARAS

PARALELOGRAMO

Las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio

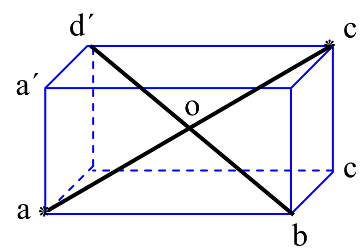


$$\overline{ao} \cong \overline{oc}$$
$$\overline{do} \cong \overline{ob}$$

CUERPOS

PARALELEPÍPEDO

Las diagonales del paralelepípedo se cortan en el punto medio

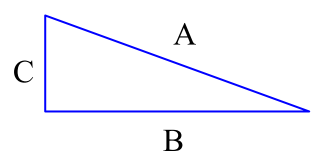


$$\overline{ao} \cong \overline{oc'}$$
$$\overline{bo} \cong \overline{od'}$$
$$\overline{a'o} \cong \overline{oc}$$

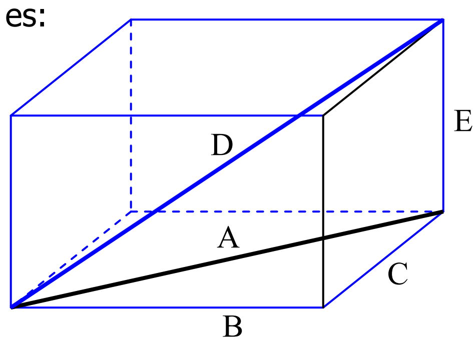
TEOREMA DE PITÁGORAS GENERALIZADO AL ESPACIO

En el plano es:

$A^2 = B^2 + C^2$



En el espacio es:



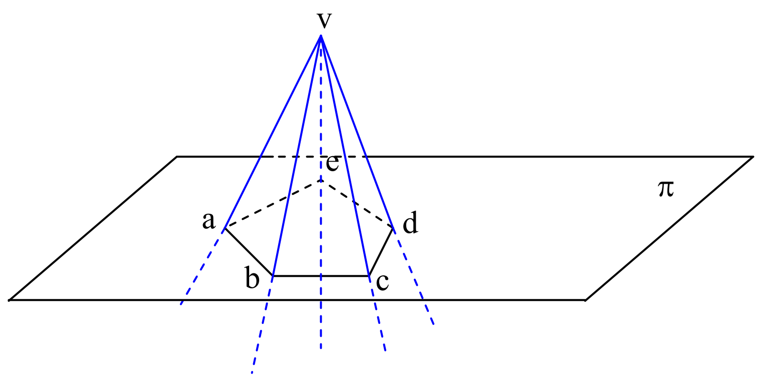
$D^2 = A^2 + E^2$

Pero: $A^2 = B^2 + C^2$

$\Rightarrow D^2 = B^2 + C^2 + E^2$

PIRÁMIDES

Dado un ángulo poliedro de vértice **v** y un plano π que corta a todas sus aristas, se llama ***pirámide*** a la intersección del ángulo poliedro y el semiespacio de borde π que contiene al vértice"



ELEMENTOS DE LA PIRÁMIDE

Base: es el polígono **abcde** que se obtiene como intersección del ángulo poliedro y el plano π

Vértice: el punto **v** se llama vértice de la pirámide.

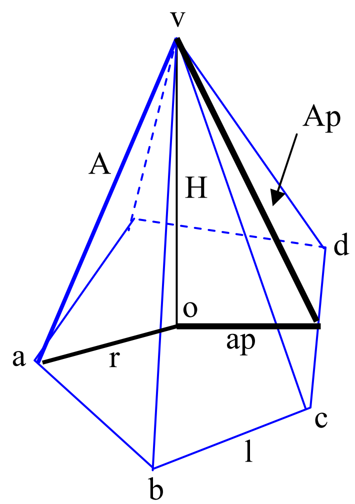
Caras laterales: $a\hat{v}b$, $b\hat{v}c$, $c\hat{v}d$, $d\hat{v}e$, eva

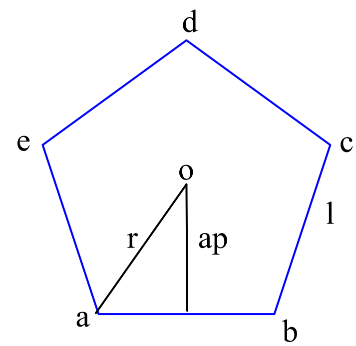
Aristas laterales: $\overline{va}$, $\overline{vb}$, $\overline{vc}$, $\overline{vd}$, $\overline{ve}$

Aristas de la base: $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, $\overline{ea}$

PIRÁMIDE REGULAR

Si la base de una pirámide es un polígono regular y el pie de la altura coincide con el centro del polígono, se dice que la pirámide es *regular*.





o es el centro de la base

ap es el apotema de la base

Ap es el apotema de la pirámide

r es el radio de la base (radio de la circunferencia circunscripta al polígono de la base)

l es el lado o arista de la base

A es la arista de la pirámide

H es la altura de la pirámide

El apotema de la pirámide es la altura de cada una de las caras laterales. Como las caras laterales son triángulos isósceles, el apotema es altura y mediana de la cara.

Vemos que Altura^2 = Apotema^2 - apotema^2

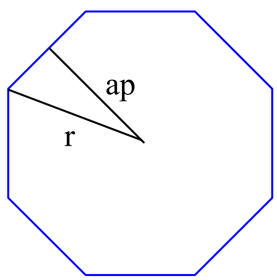
$$H^2 = Ap^2 - ap^2$$

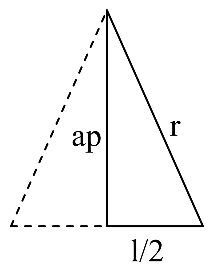
Ejercicio:
Una pirámide regular exagonal tiene 4 metros. de altura y el lado de su base es de 2 metros.
Calcula:

a) el radio de la base
b) el apotema de la base
c) el apotema de la pirámide
d) la arista de la pirámide
e) el área de la base
f) el área de una de sus caras

a) como en un exágono el radio es igual al lado, será **r = 2 mts.**

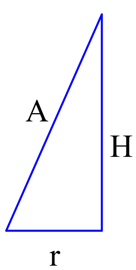
b)

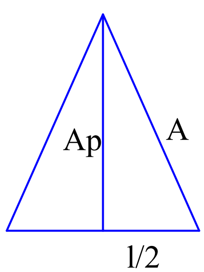




$$ap = \sqrt{r^2 - (\frac{l}{2})^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}m$$

c) y d)



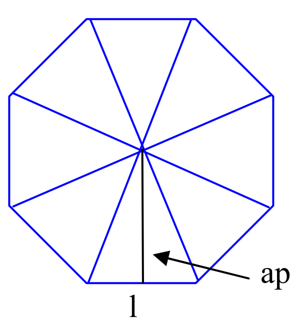


$$\text{Arista de la pirámide} = \sqrt{H^2 + r^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} =$$

$$\text{A} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}m = 4{,}47m$$

$$\text{Ap} = \sqrt{A^2 - (\frac{l}{2})^2} = \sqrt{4{,}47^2 - 1^2} = \sqrt{19{,}98} = 4{,}36m$$

e)

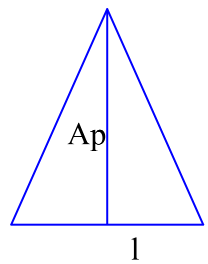


Área de la base = 6 x área de un triángulo

$$\text{Área de un triángulo} = \frac{l \times ap}{2}$$

$$\text{Área base} = \frac{6 \times l \times ap}{2} = \frac{6 \times 2m \times \sqrt{3}m}{2} = 10{,}39m^2$$

f)

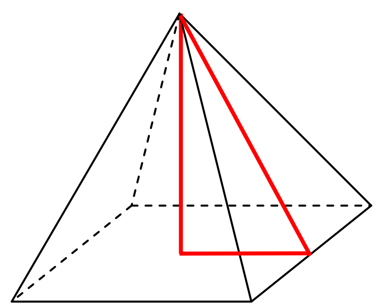


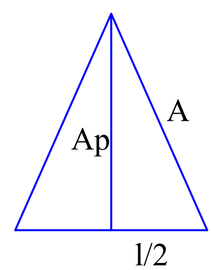
$$\text{Área de una cara} = \frac{l \times Ap}{2} = \frac{2m \times 4{,}36m}{2} = 4{,}36m^2$$

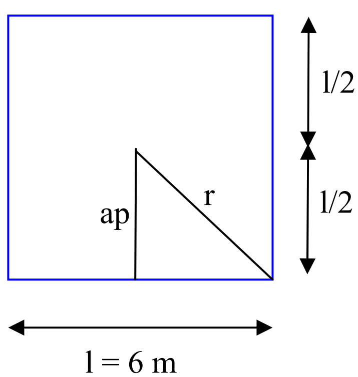
<u>Ejercicio</u>:

El área de la base de una pirámide regular cuadrada es de 36 cm^2. Las aristas de la pirámide son congruentes con los lados de la base.
Calcula:

a) el apotema de la base
b) el radio de la base
c) el apotema de la pirámide
d) la altura de la pirámide







$$\text{Área base} = l^2 \Rightarrow \; l = \sqrt{A} = \sqrt{36cm^2} = 6cm$$

Arista de la base = 6 cm

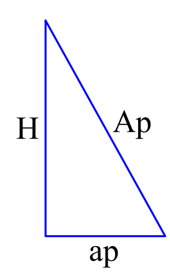
a) $\text{apotema de la base} = \dfrac{l}{2} = \dfrac{6}{2} = 3cm$

b)

$$r = \sqrt{ap^2 + (\frac{l}{2})^2} = \sqrt{(\frac{l}{2})^2 + (\frac{l}{2})^2} = \sqrt{2(\frac{l}{2})^2} =$$

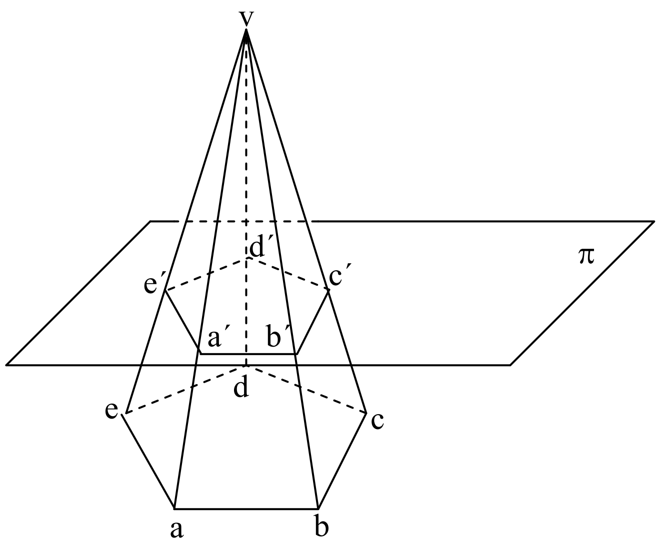
$$r = \sqrt{2} \times \frac{l}{2} = 3\sqrt{2}cm$$

c) $Ap = \sqrt{A^2 - (\frac{l}{2})^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 5{,}20cm$



d) $H = \sqrt{Ap^2 - ap^2} = \sqrt{5{,}20^2 - 3^2} = \sqrt{18{,}04} = 4{,}25cm$

TRONCO DE PIRÁMIDE



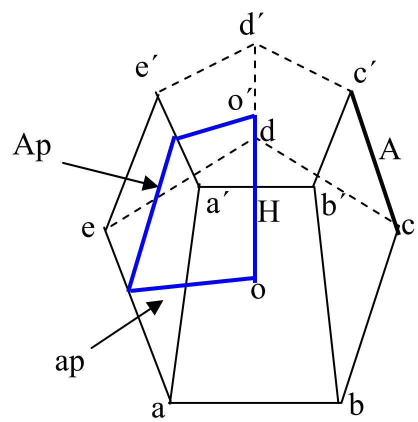
Si una pirámide se secciona con un plano π, paralelo al plano de la base, se llama ***tronco de pirámide*** a la intersección de la pirámide y el semiespacio de borde π que no contiene al vértice.

Si la pirámide es regular, se obtiene un tronco de pirámide regular.

***Bases*:** el polígono **abcde** se llama *base mayor* del tronco de pirámide. El polígono **a´b´c´d´e´** se llama *base menor* del tronco de pirámide.
Las bases del tronco de pirámide son secciones paralelas del poliedro de vértice **v** y en consecuencia son polígonos semejantes.

***Altura*:** Los centros de las bases **o** y **o´** pertenecen a la misma perpendicular a las bases. El segmento $\overline{oo'}$ es la *altura* del tronco de pirámide.

$$\overline{oo'} = H$$

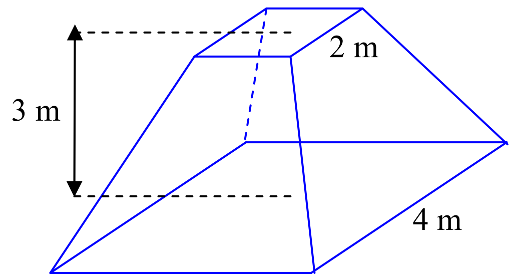


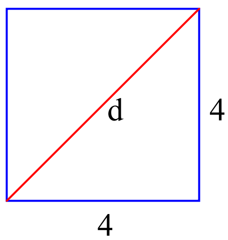
Arista: el segmento determinado por dos vértices correspondientes de las bases se llama *arista* del tronco de pirámide (**A**)

Apotema: El segmento determinado por un par de puntos medios de dos lados correspondientes de las bases se llama *apotema* del tronco de pirámide (**Ap**)

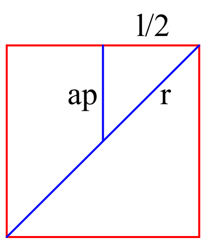
<u>Ejercicio:</u>

Un tronco de pirámide regular tiene bases cuadradas de 4 m y 2 m de lado y una altura de 3m.
Calcula:
a) los radios de las bases
b) las aristas laterales
c) el apotema del tronco de pirámide





a) (en base mayor) $d = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 5{,}66m$

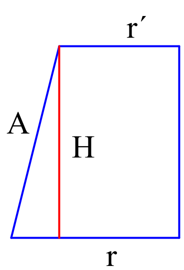


$$r = \frac{d}{2} = \frac{5{,}66}{2} = 2{,}83m$$

$$\text{ap} = \sqrt{r^2 - (\frac{l}{2})^2} = \sqrt{2{,}83^2 - 2^2} = \sqrt{4} = 2m$$

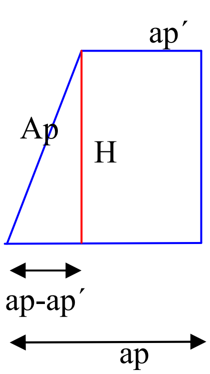
(en base menor) $r' = \dfrac{d'}{2} = \dfrac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{2} = 1{,}41m$

b)



$$\text{A} = \sqrt{3^2 + (2{,}83 - 1{,}41)^2} = 3{,}32m$$

$$\text{ap}' = \sqrt{r'^2 - (\frac{l}{2})^2} = \sqrt{1{,}41^2 - 1^2} = 1m$$



$$\text{Ap} = \sqrt{H^2 + (2-1)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} = 3{,}16m$$

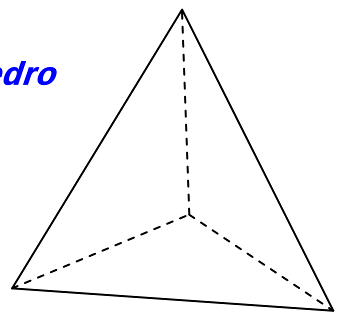
POLIEDROS REGULARES

Se dice que un poliedro convexo es regular si sus caras son polígonos regulares congruentes y en cada vértice concurre el mismo número de caras.

Veamos a continuación los poliedros regulares y sus elementos:

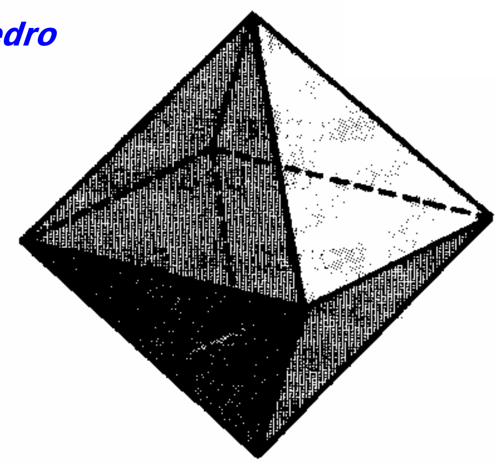
a) con caras triangulares

Tetraedro



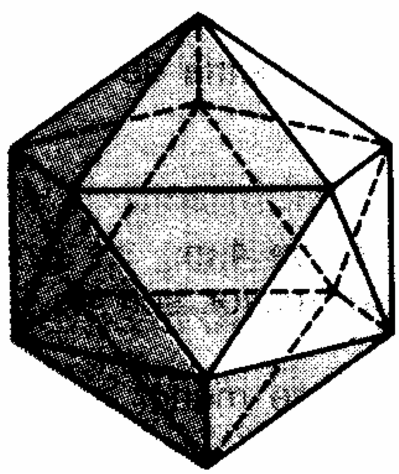
Tiene cuatro caras.
En cada vértice concurren 3 caras.

Octaedro



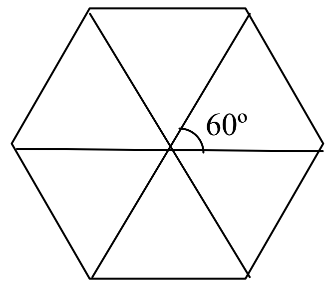
Tiene ocho caras. En cada vértice concurren 4 caras.

Icosaedro



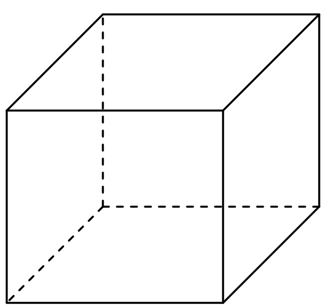
Tiene veinte caras. En cada vértice concurren 5 caras.

No pueden concurrir mas de 5 caras en un vértice, pues la suma de los ángulos es igual o mayor que 4 rectos (360º). En consecuencia no es posible formar un ángulo poliedro, ya que la figura queda abierta en un solo plano. Por eso no hay más poliedros regulares con caras triangulares.

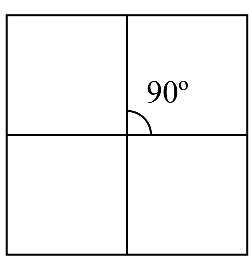


b) con caras cuadradas

Exaedro o cubo



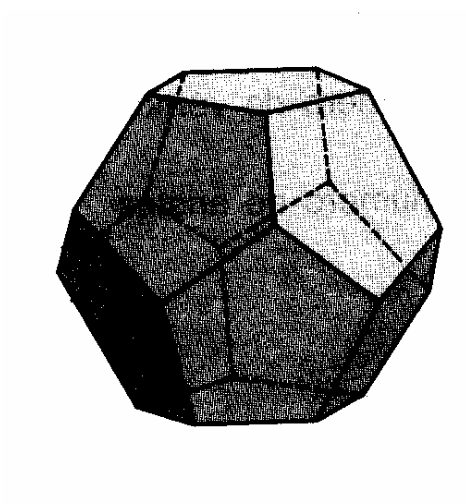
Tiene seis caras. En cada vértice concurren 3 caras.



No pueden concurrir más de 3 caras en un vértice porque da la suma de ángulos igual o mayor que 360º y queda la figura abierta.

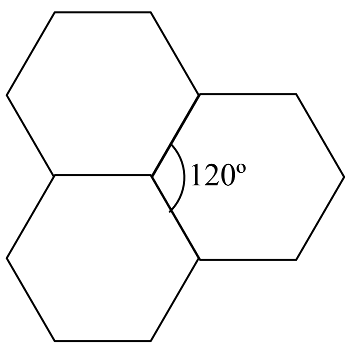
c) con caras pentagonales

Dodecaedro



Tiene doce caras. En cada vértice concurren 3 caras.

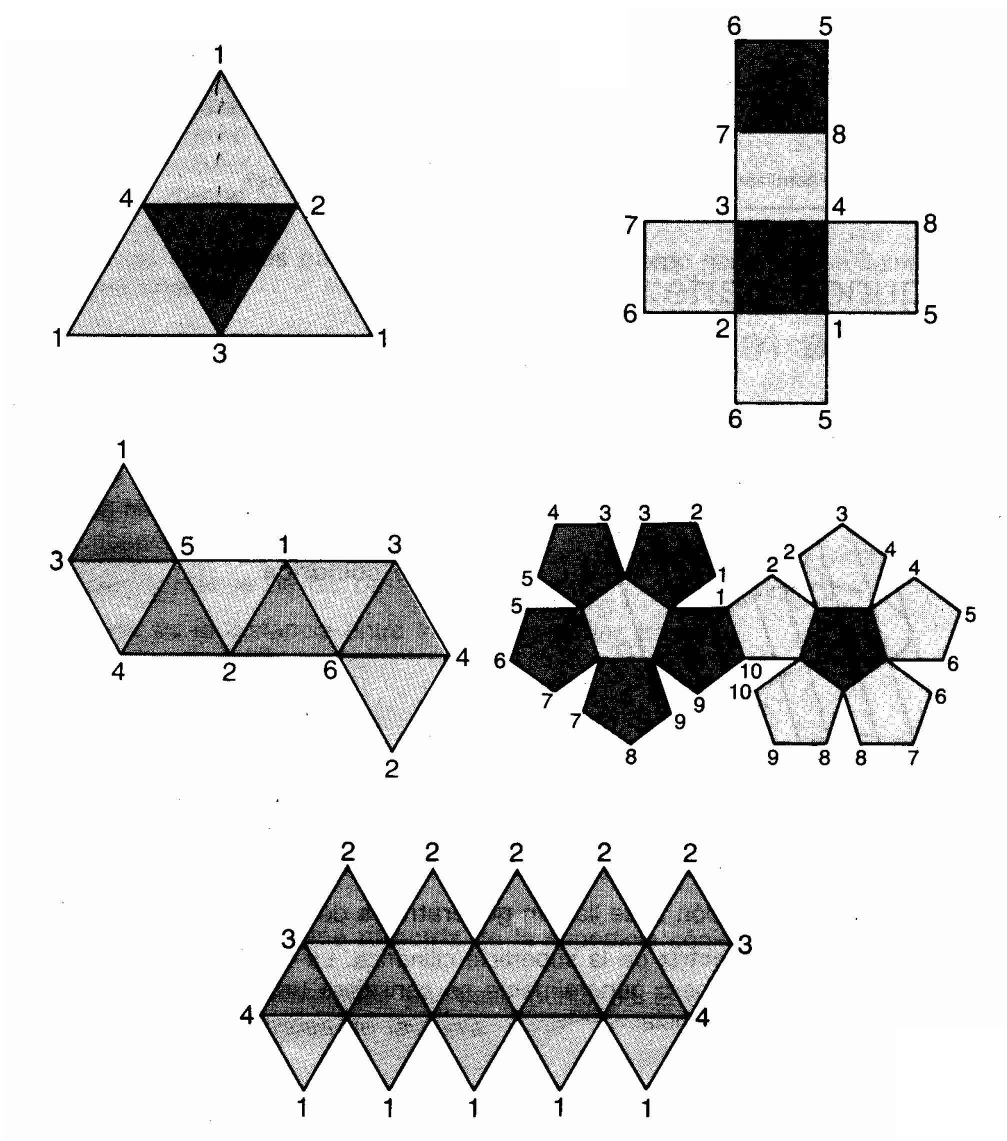
d) caras poligonales de 6 o más lados



3 exágonos ya totalizan 360º en el vértice, por lo que no se puede obtener un poliedro regular.

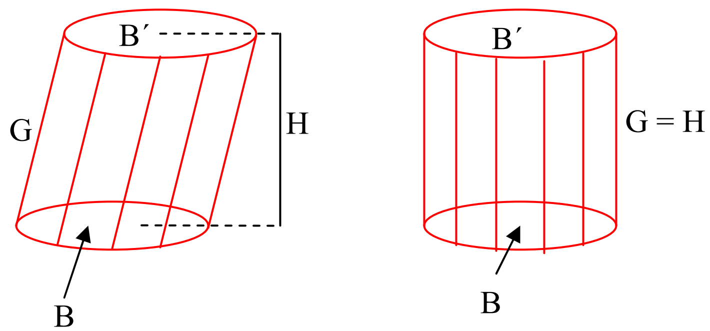
En consecuencia **solo existen 5 poliedros regulares**

CONSTRUCCIÓN DE POLIEDROS REGULARES



CUERPOS REDONDOS

CILINDRO



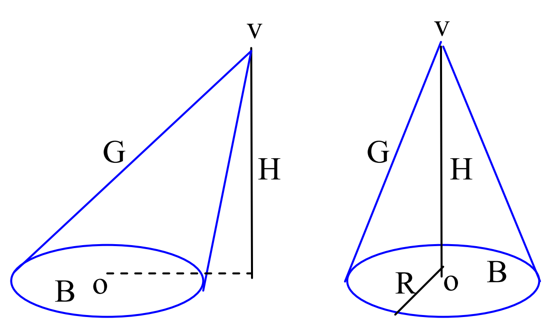
Cilindro circular oblicuo Cilindro circular recto

Elementos:

Bases: son las secciones paralelas
Generatrices: son los segmentos de las rectas comprendidas entre los planos de las bases.
Altura: es la distancia entre los planos de las bases

Si las secciones paralelas (bases) son círculos, el cuerpo se llama *cilindro circular*
Si además, las generatrices son perpendiculares a las bases, se obtiene un *cilindro circular recto*.

CONO



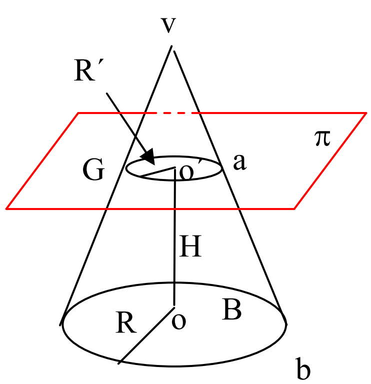
Cono circular oblicuo Cono circular recto

Se llama *cono* al cuerpo sólido limitado por la superficie cónica comprendida entre el vértice y la base.

Si la base es un círculo, el cuerpo generado se llama *cono circular*.
Si además, el vértice pertenece a la perpendicular a la base que pasa por su centro, se genera un *cono circular recto.*

Elementos:
Base: B
Altura: H
Generatriz: G
Radio de la base: R
Centro de la base: o
Vértice: v

TRONCO DE CONO DE BASES PARALELAS



Si un cono se secciona con un plano paralelo al plano de la base, se llama ***tronco de cono*** a la intersección del cono y el semiespacio de borde π que no contiene al vértice.

Bases: el círculo de centro **o** y radio **R** se llama *base mayor* del tronco de cono.
El círculo de centro **o´** y radio **R´** se llama *base menor* del tronco de cono.

Si el cono es recto, se obtiene un *tronco de cono recto*.

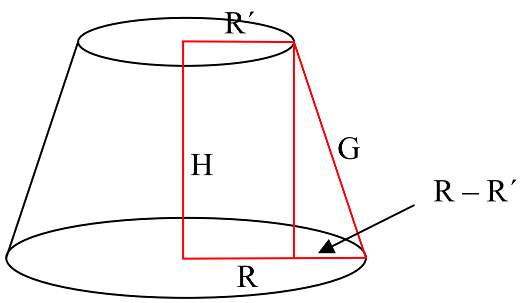
Altura: el segmento $\overline{oo'}$ se llama *altura del tronco de cono.*

Generatriz: los segmentos de generatrices del cono comprendidos entre las bases son las *generatrices* del tronco de cono

$\overline{ab}$ = generatriz

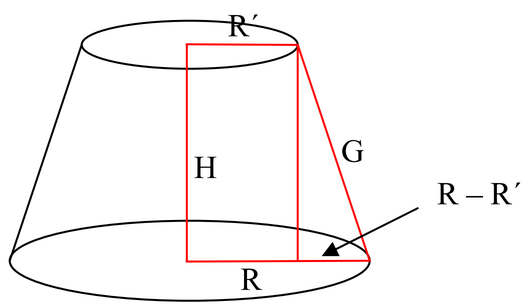
Ejercicios:

1) Escribe la relación entre la altura, la generatriz y los radios de un tronco de cono recto.



$$G^2 = H^2 + (R - R')^2$$

2) Un tronco de cono tiene una altura de 12 cm. Los radios tienen 9 cm y 4 cm. Calcula la generatriz.

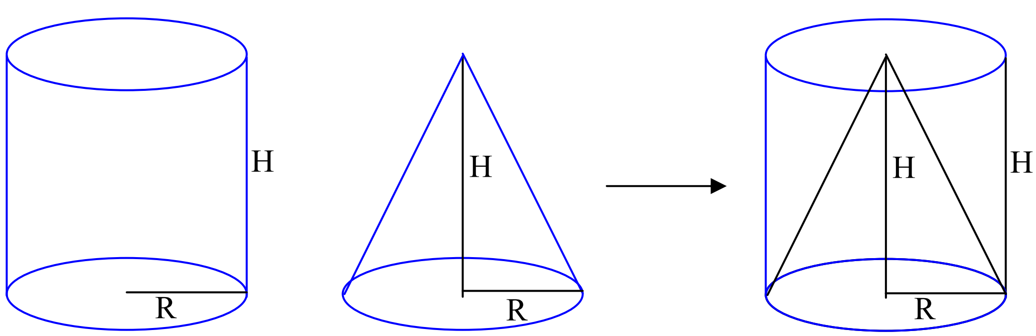


$$G^2 = H^2 + (R - R')^2$$

$$G = \sqrt{H^2 + (R^2 - R'^2} =$$

$$G = \sqrt{12^2 + (9-4)^2} = 13cm$$

CÀLCULO DEL VOLUMEN DE UN CONO O UNA PIRÁMIDE



En general, podemos decir que el volumen de un cono, es un tercio del volumen del cilindro en el que se halla inscripto.

Así, el volumen del cono es: Superficie de la base x altura = $\pi \times R^2 \times H$

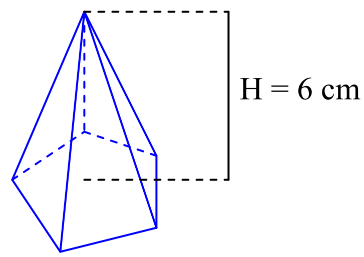
Entonces, el volumen del cono será: $\dfrac{\pi \times R^2 \times H}{3}$

Con la pirámide pasa lo mismo, solo que su volumen será un tercio del volumen del prisma que lo contenga.

<u>Ejercicio</u>:

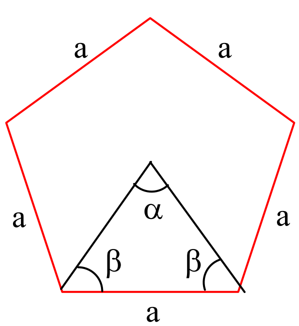
Tenemos una pirámide regular recta de base pentagonal en la que las aristas de la base miden la tercera parte de la altura de la pirámide.
Calcular:

a) Superficie de la base
b) Apotema de la pirámide
c) Superficie lateral de la pirámide
d) Superficie total de la pirámide
e) Volumen de la pirámide



Para resolver este problema debemos primero analizar la base, para poder obtener datos que nos permitan resolver el resto.

a) Superficie de la base



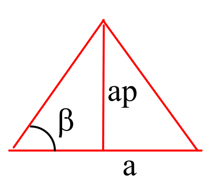
El pentágono de base es regular, por lo que todos sus lados serán iguales, y por dato es:

a = lado = $\dfrac{H}{3} = \dfrac{6cm}{3} = 2cm$

α = ángulo central = $\dfrac{360^o}{5} = 72^o$

2 β = 180º - $\alpha \Rightarrow$ β = $\dfrac{180^o - \alpha}{2} = \dfrac{180^o - 72^o}{2} = 54^o$

Sup. Base = 5 x Sup. Triángulo

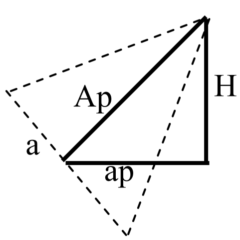


$S_{triang} = \dfrac{a \times ap}{2}$

$\text{tg } \beta = \dfrac{ap}{\frac{a}{2}} = \dfrac{ap \times 2}{a} \Rightarrow ap = \dfrac{tg\beta \times a}{2} = \dfrac{tg54^{o} \times 2cm}{2} = 1{,}376cm$

$\text{Sup. Base} = 5 \times (\dfrac{2cm \times 1{,}376cm}{2}) = 6{,}88cm^2$

b) Apotema de la pirámide

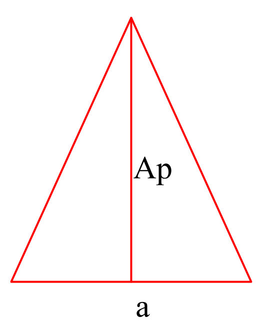


Si observamos un corte de la pirámide, veremos un triángulo rectángulo cuyos lados son la ***altura*** de la pirámide, el ***apotema de la base*** y la altura del triángulo lateral (cara de la pirámide) que es el ***apotema de la pirámide*** (Ap).

Por el teorema de Pitágoras será:

$Ap = \sqrt{ap^2 + H^2} = \sqrt{1{,}376^2 + 6^2} = 6{,}156cm$

c) Superficie lateral de la pirámide.



La pirámide tiene 5 caras, por lo que para calcular su superficie lateral debemos calcular la superficie de una de sus caras y multiplicarla por 5.

$S_{lat} = 5 \,.\, Sup_{cara} =$

$5 \times (\dfrac{a \times Ap}{2}) = 5 \times (\dfrac{2cm \times 6{,}156cm}{2}) = 30{,}78cm^2$

d) Superficie total de la pirámide

Sup total = Sup. base + Sup. lateral = 6,88 cm^2 + 30,78 cm^2 = 37,66 cm^2

e) Volumen de la pirámide

$$V = \frac{Sup.base \times altura}{3} = \frac{6{,}88cm^2 \times 6cm}{3} = 13{,}76cm^3$$