MATEMATICA 1C

TRIGONOMETRÍA

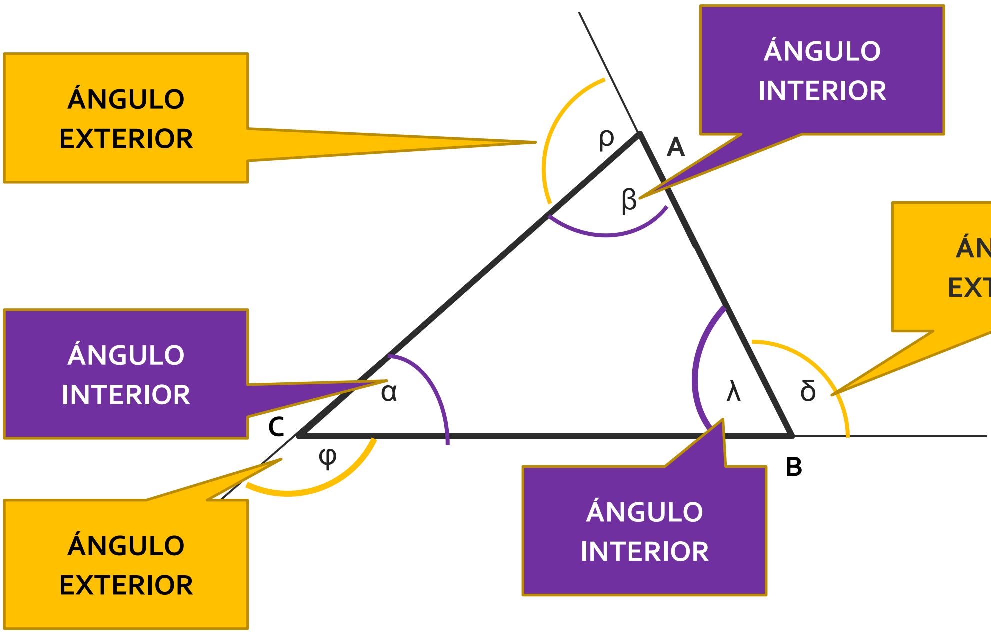
La **trigonometría** es la rama de las matemáticas que estudia la relación entre los lados y ángulos de los triángulos.

Para entender la trigonometría es necesario comprender que es un triángulo:

"Es un polígono de tres lados" y ¿qué es un polígono?:

"Figura geométrica plana que está limitada por tres o más rectas y que tiene tres o más ángulos y vértices"

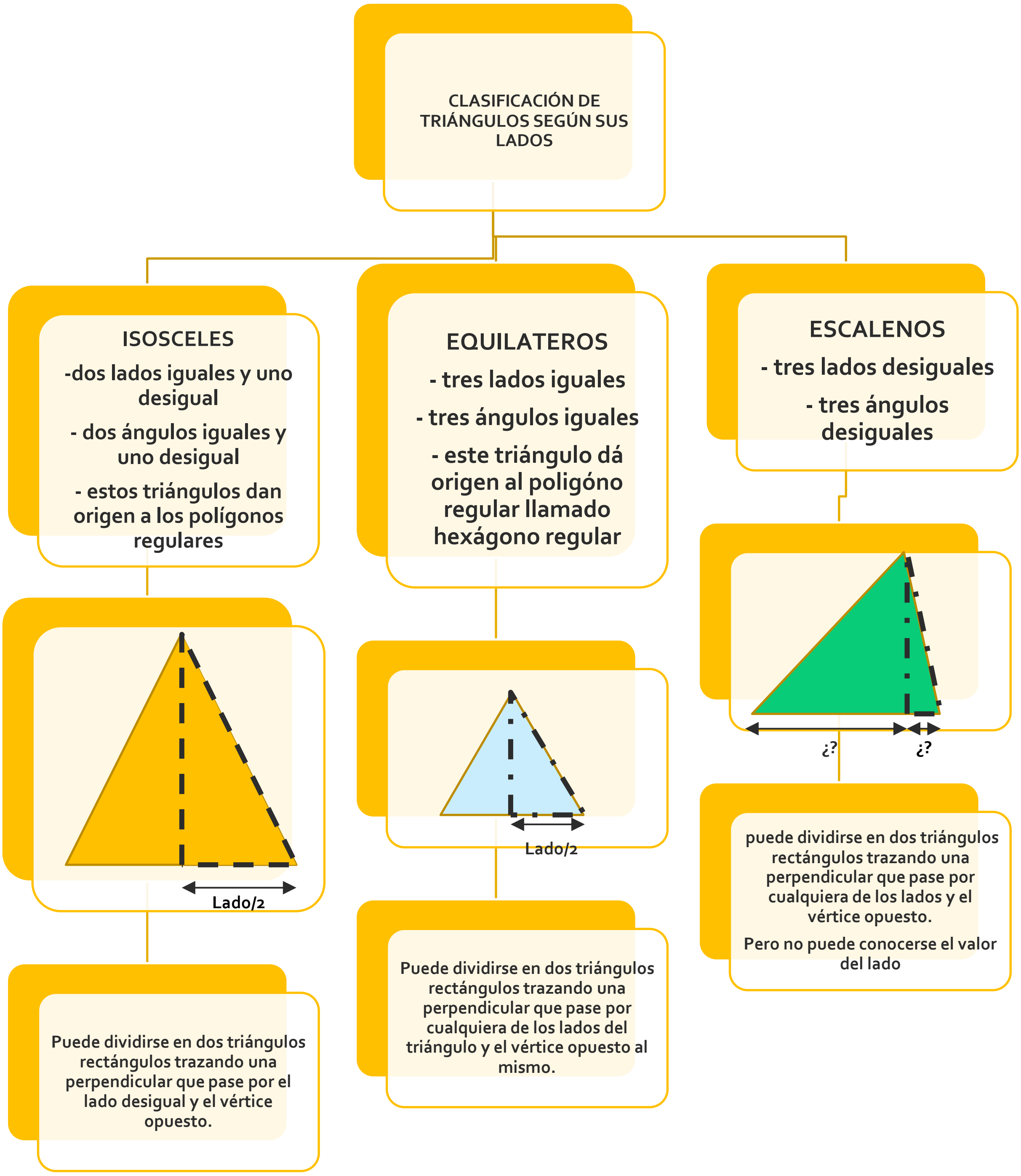
Veamos algunas de las características de los polígonos aplicadas al triángulo.



Entonces:

- La suma de todos los ángulos interiores de un triángulo es siempre igual a 180º
- La suma de un ángulo interior **λ** más un ángulo exterior **δ** es igual a 180ºporque son suplementarios.
- El triángulo, como veremos, es la figura plana que da origen a los demás polígonos.
- No tiene diagonales.

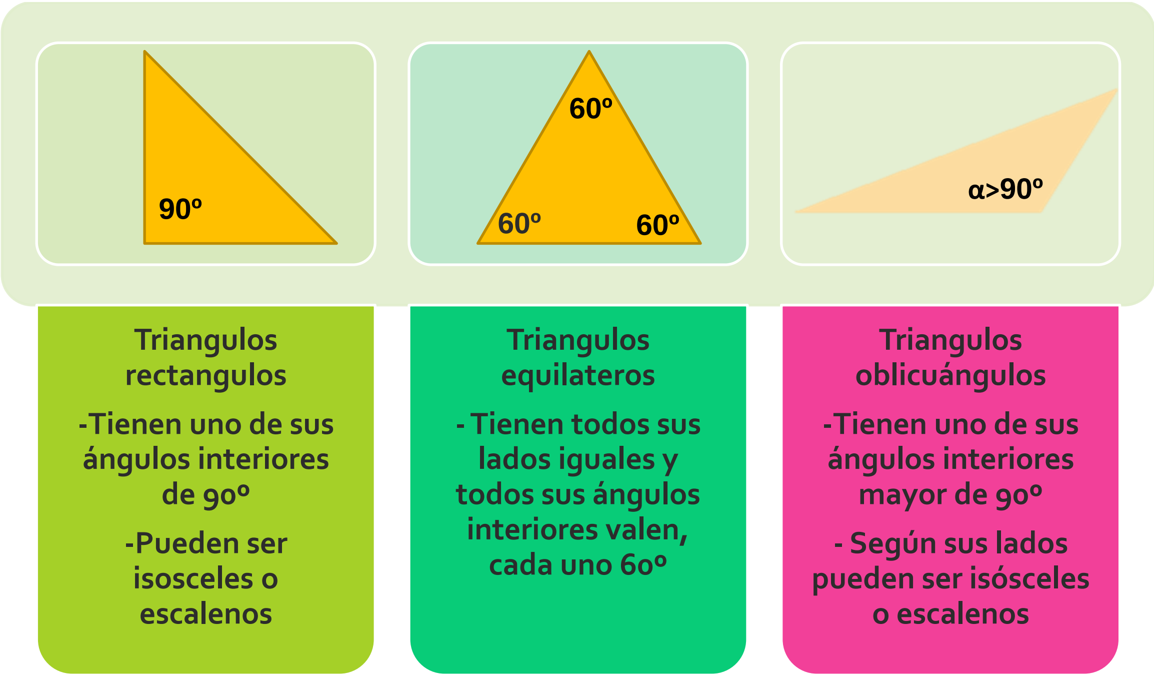
Aclarados estos conceptos veremos cómo se clasifican los triángulos según sus lados:



Como ya vimos los triángulos dan origen a todos los demás polígonos, es por eso que veremos cómo resolverlos, entendiendo por resolver como calcular sus lados, sus ángulos, su superficie y su perímetro.

Es importante aclarar que para resolver cualquier triángulo debo conocer al menos tres datos del mismo, y al menos uno de ellos debe ser el valor de un lado.

Para poder resolver cualquier triángulo primero debemos clasificarlos una vez más, esta vez según sus ángulos interiores en:



Resolución de triángulos rectángulos.

Determinación del valor de lados y ángulos del triangulo

- **a-** **Si se conocen dos lados y un ángulo (aparte de aquel de 90º) podemos aplicar el teorema de Pitágoras.**
- **b-** **Si se conoce solo un lado y dos ángulos debemos recurrir a las funciones trigonométricas.**
- **c-** **Si solo conocemos el valor de los lados deberemos recurrir al teorema del coseno para calcular los ángulos interiores.**
- **d-** **Si solo conocemos el valor de los ángulos interiores no podremos conocer el valor de los lados.**

Ahora veremos a que nos referimos cuando hablamos del Teorema de Pitágoras, Funciones Trigonométricas y Teorema del coseno:

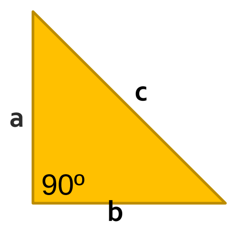
Teorema de Pitágoras:

“En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”

Recuerden:

- **Cada cateto es siempre menor que la hipotenusa.**
- **Los segmentos que forman los catetos son los lados del ángulo de 90º.**

Ahora si vemos como se aplica el teorema en diversos casos:

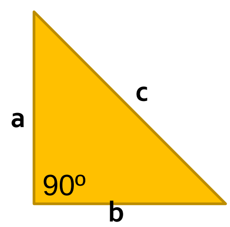


Datos:
Lado a
Lado b

Pitágoras:
Calculo del lado c:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



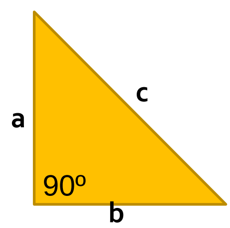
Datos:
Lado a
Lado c

Pitágoras:
Calculo del lado b:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



Datos:
Lado c
Lado b

Pitágoras:
Calculo del lado a:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Como se observa el teorema de Pitágoras solo puede aplicarse si el triángulo es rectángulo y solo permite determinar la longitud de los lados del triángulo.

Pero si lo que necesitamos es determinar es el valor de los ángulos interiores y solo conocemos el ángulo de 90º deberemos recurrir a las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente que solo se aplican a triángulos rectángulos y que nos permiten a partir del conocimiento del valor de los lados determinar el valor de los ángulos.

Funciones trigonométricas

Veremos las siguientes funciones trigonométricas:

Seno α= $\dfrac{CATETO\ OPUESTO}{HIPOTENUSA} = \dfrac{a}{c}$

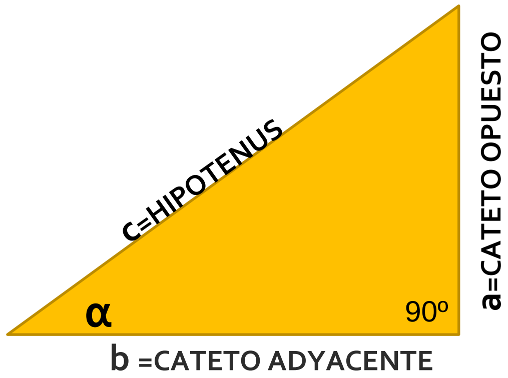
El resultado del cociente es siempre menor que 1 ya que cualquiera de los catetos es menor que la hipotenusa.

Coseno α= $\dfrac{CATETO\ ADYACENTE}{HIPOTENUSA} = \dfrac{b}{c}$

El resultado del cociente es siempre menor que 1 ya que cualquiera de los catetos es menor que la hipotenusa.

Tangente α= $\dfrac{CATETO\ OPUESTO}{CATETO\ ADYACENTE} = \dfrac{a}{b}$

El resultado del cociente puede variar entre – infinito y + infinito. Se acerca a + infinito a medida que α se acerca a 90º.



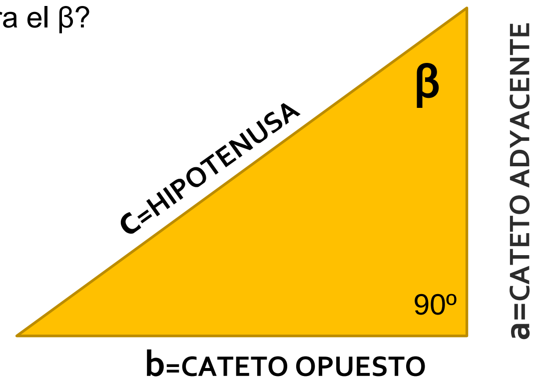
- El cateto opuesto es, en este caso, el señalado ya que el ángulo en estudio es el **α**.
- Prestar atención al hecho de que los catetos son lados del ángulo de 90º

¿Pero qué pasaría si el ángulo en estudio fuera el β?

Seno β= $\frac{\boldsymbol{CATETO\ OPUESTO}}{\boldsymbol{HIPOTENUSA}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$

Coseno β= $\frac{\boldsymbol{CATETO\ ADYACENTE}}{\boldsymbol{HIPOTENUSA}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}$

Tangente α= $\frac{\boldsymbol{CATETO\ OPUESTO}}{\boldsymbol{CATETO\ ADYACENTE}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$



c- Si solo conocemos el valor de los lados deberemos recurrir al teorema del coseno para calcular los ángulos interiores.

El teorema del coseno dice:

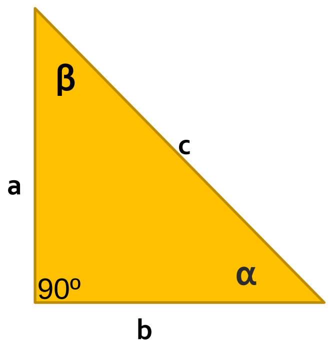
"Conocidos dos lados de un triángulo y el ángulo entre ellos comprendido el valor del cuadrado del tercer lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de esos lados por el coseno del ángulo entre ellos comprendido"

Esto quiere decir que:

- **Si conocemos dos lados y el ángulo que se forma entre ellos podemos conocer el tercer lado.**
- **Que si conocemos los tres lados podemos conocer los ángulos interiores.**

  Veamos como:

Si conocemos los lados de un triángulo y necesitamos conocer el valor de los ángulos interiores α y β:



Ejemplo numérico:

Datos: a=3 b=4 c=5

$3^2 = 4^2 + 5^2 - 2x4x5x\cos\alpha$

$9 - 16 - 25 = -40x\cos\alpha$

$\frac{(-32)}{(-40)} = \cos\alpha$ α= 36º52`11,63"

β= 180º- 90º- 36º52`11,63"=

β= 53º07`48,37"

Conocidos los lados a,b ,c y el ángulo de 90º

Planteamos el teorema del coseno para determinar el valor de α :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos\alpha$ despejando

$a^2 - b^2 - c^2 = -2 \times b \times c \times \cos\alpha$ seguimos despejando

$\frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{(-2 \times b \times c)} = \cos\alpha$ fíjense que el signo negativo pasó al primer miembro ya que nos interesa conocer el valor del cos de α y no el de (- cos de α)

Una vez que tenemos el valor del coseno de α obtenemos el valor del ángulo.

Y entonces β= 180º-α-90º

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS

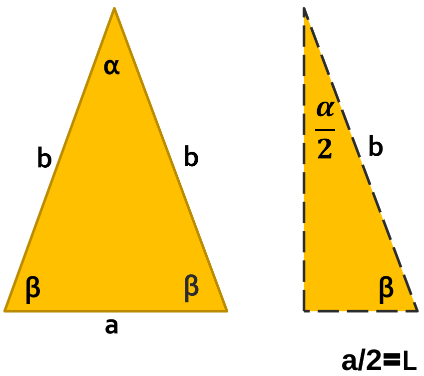
En este caso debemos trabajar las siguientes posibilidades:

- **a- Que el triángulo sea isósceles.**
- **b- Que el triángulo sea equilátero.**
- **c- Que el triángulo sea escaleno.**

Casos a- y b-

En estos casos podemos por dos caminos:

1- **Si el triángulo es isósceles trazar una perpendicular al lado desigual que pase por el vértice opuesto y dividir así al triangulo en dos triángulos rectángulos que se resolverían como vimos anteriormente.**



Dando valores numéricos al ejemplo:

b= 5 α=30º

Resolvemos:

β = 180º-90º-15º= 75º

L/b= cos β x b = cos 75º x 5 = 1,294

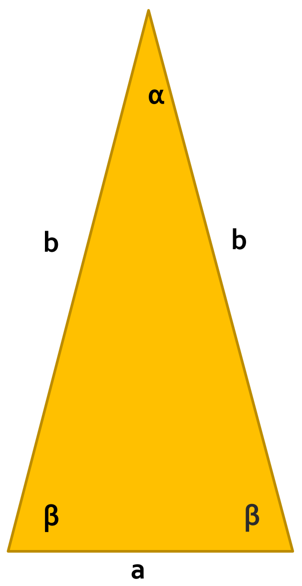
L=a/2 a= 2 x L= 2 x 1,294 = 2,58819

2- **Si el triángulo es equilátero sus tres lados son iguales y cada uno de sus ángulos interiores mide 60º, por lo tanto puedo trazar una perpendicular a cualquiera de sus lados que pase por el vértice opuesto con la certeza de que ese lado quedará divido en dos partes iguales. Y se repite el proceso visto en el punto 1.**

3- **Si no deseamos dividir los triángulos en dos triángulos rectángulos podemos recurrir a los teoremas del seno y del coseno que pueden aplicarse a cualquier tipo de triangulo.**

Recordemos el teorema del coseno: "Conocidos dos lados de un triángulo y el ángulo entre ellos comprendido el valor del cuadrado del tercer lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de esos lados por el coseno del ángulo entre ellos comprendido"

Apliquémoslo para el caso de un triángulo isósceles:



- Si conocemos el lado “b” conozco dos lados y para despejar “a” necesito conocer también “α”

a^2= b^2+b^2-2xbxbxcosα

Ejemplo: b=3 α= 30º

a^2 = 9+9- 18xcos 30º= 2,4115   a=$\sqrt{2,4115}$=1,5529

- Si conozco “a” y “b” y necesitamos conocer los ángulos:

$\frac{(a^2-b^2-b^2)}{(-2xbxb)}$ = cos α   arc cos α=α

$\frac{(b^2-a^2-b^2)}{(-2xbxa)}$ = cos β   arc cos β=β

Ejemplo: a= 4 b= 7

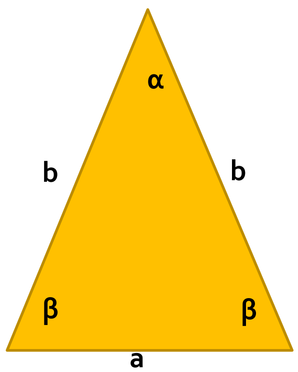
$\frac{(4^2-7^2-7^2)}{(-2x7x7)}$ = cos α   arc cos α=**α=33º12`11,16”**

$\frac{(7^2-4^2-7^2)}{(-2x7x4)}$ = cos β   arc cos β=**β= 73º23`54,42”**

α+2β=180º

Dijimos que otro teorema que puede aplicarse es el Teorema del seno:

Teorema del seno:



$\frac{b}{sen\beta} = \frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta}$

Para el caso en que: a=5 y α=40º y quiero conocer el valor de “b”

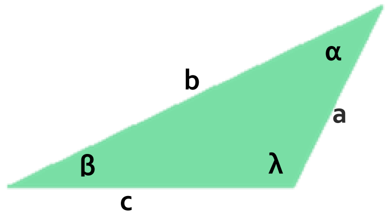
β= $\frac{(180º-40º)}{2}$ **= 70º**

$\frac{b}{sen70º} = \frac{5}{sen40º}$ **despejando**

b=$\frac{5}{sen40º} xsen\ 70º = 7,3095$

Caso c- Triángulo escaleno-

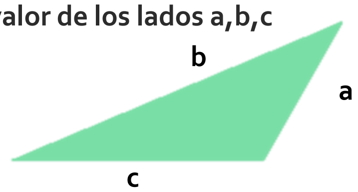
La única manera de resolver este tipo de triángulos es utilizando los teoremas del seno o del coseno. Usar uno u otro teorema depende de los datos con los que contemos.



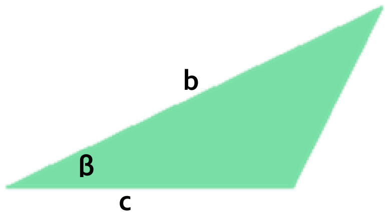
¿Cuándo usar el teorema del coseno?

Cuando los datos son:

a. Solo el valor de los lados a,b,c



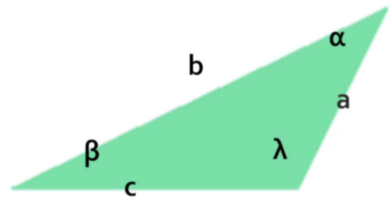
b. E l valor de dos lados c y b y el ángulo ente ellos comprendido "β"



¿Cuándo usar el teorema del seno?

Cuando los datos son:

a. Dos lados a y b y el ángulo no comprendido entre ellos "α"

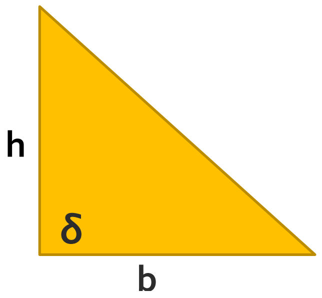


Fórmulas de superficie

a-TEOREMA FUNDAMENTAL: La superficie de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados del mismo por el seno del ángulo entre ellos comprendido.

SUP= $\frac{axbxsen\ \partial}{2}$

Caso 1- Si el triángulo es rectángulo y los datos son b,h,y δ= 90º:



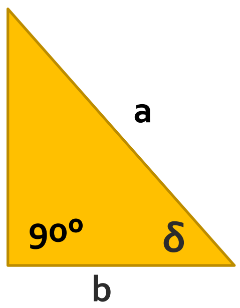
SUP= $\frac{bxhxsen\ 90^{\circ}}{2}$

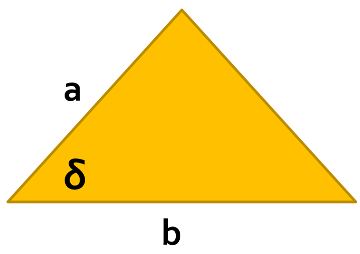
SUP= $\frac{bxhx1}{2}$

SUP= $\frac{bxh}{2}$

Caso 2- Para cualquier triángulo donde el ángulo comprendido no sea de 90º.

Ejemplos:





SUP= $\frac{bxaxsen\delta}{2}$

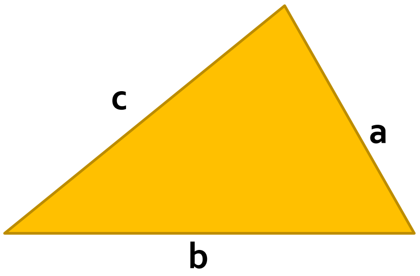
Atención!!! En la calculadora encierren entre paréntesis el numerador para que el resultado que obtengan sea el correcto:

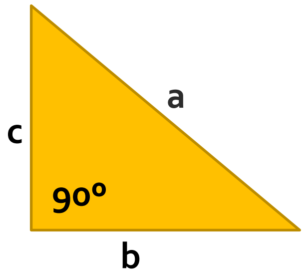
SUP= $\frac{(bxhxsen\delta)}{2}$

TEOREMA DE HERÓN

La superficie de cualquier triángulo es igual a la raíz cuadrada de la semisuma del perímetro del mismo multiplicada por las diferencias entre el semiperímetro y cada uno de los lados del triángulo.

Entonces se aplica para cualquier triángulo del que solo se conoce el valor de los lados.





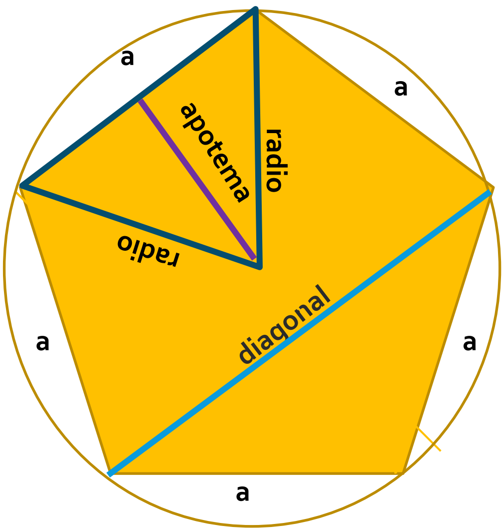
Superficie= $\sqrt{px(p-a)x(p-b)x(p-c)}$

$p=\frac{a+b+c}{2}$ este es el semiperímetro

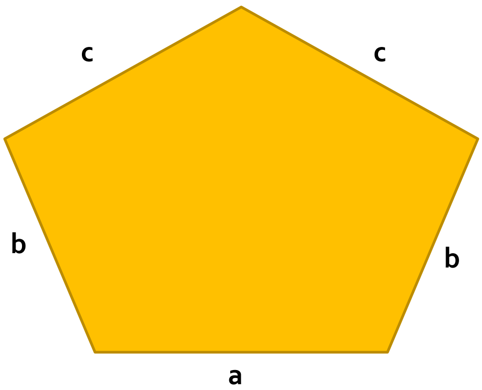
POLÍGONOS

Los polígonos pueden ser regulares o irregulares.

POLÍGONOS REGULARES	POLÍGONOS IRREGULARES
.Son equiángulos y equiláteros simultáneamente. . Están formados por triángulos isósceles, excepto el hexágono regular que está formado por triángulos equiláteros. El polígono regular con menor cantidad de lados es el triángulo equilátero . Tienen apotema y radio. . Pueden inscribirse en una circunferencia. . Pueden estar circunscriptos a una circunferencia. . Tienen diagonales todos excepto el triángulo equilátero, entendiendo por diagonales los segmentos que unen vértices no consecutivos. . Su perímetro es igual a la suma de sus lados. . Su superficie es igual a la suma de las superficies de los triángulos que los forman.	. Pueden ser equiángulos (Ej: rectángulo) o equiláteros (ej: rombo), pero no ambas cosas simultáneamente. - Los polígonos irregulares están formados por todo tipo de triángulos y por la combinación de los mismos. . No tienen ni apotema ni radio. . Su perímetro es igual a la suma de sus lados. . Su superficie es igual a la suma de las superficies de los triángulos que los forman.



Pentágono regular, equiángulo y equilátero



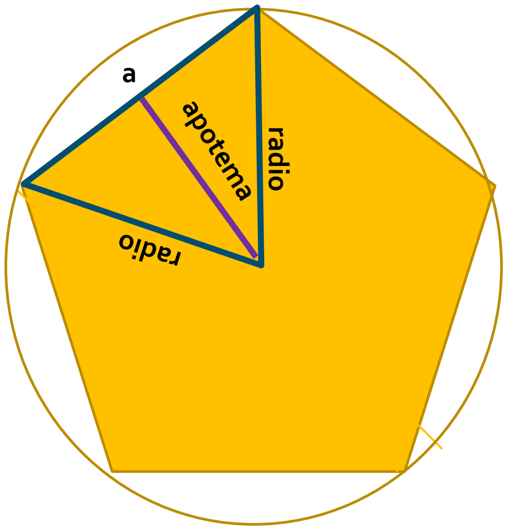
Pentágono irregular, **NO** tiene todos sus lados iguales ni todos sus ángulos congruentes

- RESOLUCIÓN DE POLÍGONOS REGULARES A PARTIR DE DIVIDIRLOS EN TRIÁNGULOS.

CASO 1- El dato único es el **apotema** del polígono regular.

Con ese único dato debo obtener:

a- Radio
b- Lado a
c- Superficie
d- Perímetro



En realidad tenemos más datos:

El valor del ángulo central:

α=$\frac{360º}{número\ de\ lados\ del\ polígono}$

En este caso:

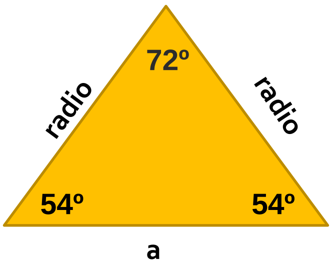
α=$\frac{360º}{5}$= 72º

si α=$\frac{360º}{5}$= 72º y β=β por ser el triángulo isósceles entonces:

180º-α= β+β

108º= 2β

108º/2=β= 54º



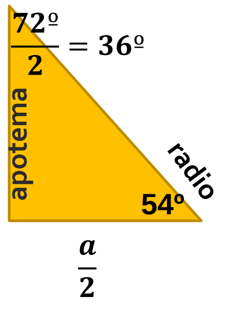
Dividiendo este triángulo en dos triángulos rectángulos:

Ahora podemos ver que tenemos un triángulo rectángulo con 4 datos, muy sencillo de resolver con funciones trigonométricas:

a- Radio

$$\frac{\text{Apotema}}{radio} = sen\ 54º$$

$$\frac{\text{Apotema}}{sen\ 54º} = radio$$



b- Lado a

$$\frac{Apotema}{a/2} = tg54º$$

Pero $\frac{a}{2} = 0{,}5a$

$$\frac{Apotema}{0{,}5a} = tg54º$$

$$a x tg54º = \frac{Apotema}{0{,}5}$$

lado a$=\frac{Apotema}{0{,}5xtg54º}$

c- SUPERFICIE

Conocido el radio puedo plantear el teorema fundamental:

S=(Radio x Radio x sen angulo central)/2 así saco la superficie de un triángulo isósceles y la multiplico en este caso por cinco que son los triángulos isósceles que forman el pentágono.

También podríamos calcular la superficie de cada uno de los triángulos rectángulos que forman esta figura plana y luego multiplicarlas por 10 en este caso del pentágono.

O bien :

Conocido el lado:

S= Perímetro x Apotema/2

Recuerden que perímetro del polígono es la suma de los lados del mismo.

El mismo análisis realizado para el caso del apotema se aplica, con sus lógicas variantes, cuando los datos son: el lado o el radio, siempre basándonos en las funciones trigonométricas.